

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Marcelo Luís Loureiro dos Santos

**MODELAGEM E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS
HIDROTÉRMICOS DE CURTO PRAZO NO CONTEXTO DA
PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA: UMA APLICAÇÃO DO
MÉTODO *PROGRESSIVE HEDGING***

Florianópolis

2010

Marcelo Luís Loureiro dos Santos

**MODELAGEM E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS
HIDROTÉRMICOS DE CURTO PRAZO NO CONTEXTO DA
PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA: UMA APLICAÇÃO DO
MÉTODO *PROGRESSIVE HEDGING***

Tese submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia
Elétrica da Universidade Federal
de Santa Catarina como parte dos
requisitos para a obtenção do
Grau de Doutor em Engenharia
Elétrica.

Orientador: Prof. Edson Luiz da
Silva, D. Eng.

Co-orientador: Prof. Erlon
Cristian Finardi, D. Eng

Florianópolis

2010

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da
Universidade Federal de Santa Catarina

S237m Santos, Marcelo Luís Loureiro dos

Modelagem e solução do problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo no contexto da programação estocástica [tese] : uma aplicação do método progressive hedging / Marcelo Luís Loureiro dos Santos ; orientador, Edson Luiz da Silva. - Florianópolis, SC, 2010.

1 v.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia elétrica. 2. Sistemas de energia elétrica hidrotérmica. 3. Programação estocástica - Avaliação. I. Silva, Edson Luiz da. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Marcelo Luís Loureiro dos Santos

**MODELAGEM E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS
HIDROTÉRMICOS DE CURTO PRAZO NO CONTEXTO DA
PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA: UMA APLICAÇÃO DO
MÉTODO *PROGRESSIVE HEDGING***

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Sistemas de Energia Elétrica, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 30 de abril de 2010.

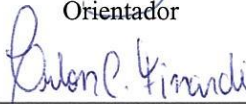


Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D. Coordenador do Curso


Banca Examinadora:



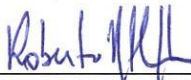
Prof. Edson Luiz da Silva, D.Eng
Orientador



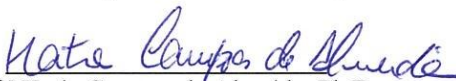
Prof. Erlon Cristian Finardi, D.Eng.



Prof.^a Cláudia Alejandra Sagastizábal, D.Habil.



Eng. Roberto Nogueira Fontoura Filho, D.Sc.



Prof.^a Katia Campos de Almeida, Ph.D.

RESUMO

O planejamento da operação energética sistemas hidrotérmicos resulta em um problema de grande porte e que dada a essa característica, tem sido resolvido em etapas. A etapa referente ao curto prazo corresponde ao problema em foco neste trabalho. O planejamento da operação curto prazo consiste na determinação de uma política de operação do sistema que visa minimizar o custo esperado de produção. Dada a dificuldade em realizar uma previsão precisa das vazões afluentes para o horizonte estudado, essas são modeladas como variáveis aleatórias. Nesse contexto, este trabalho visa modelar e resolver esse problema de otimização sob o paradigma da Programação Estocástica. Assim, neste trabalho são apresentados modelos matemáticos que podem ser utilizados no planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo. A solução do problema é realizada por meio do método do *Progressive Hedging*. Um problema teste de médio porte, composto por uma configuração hidrotérmica extraída do Sistema Interligado Brasileiro, é utilizado para avaliar a aplicação prática do método de solução proposto..

Palavras-chave: Sistemas Hidrotérmicos, Programação
Estocástica, *Progressive Hedging*

ABSTRACT

The hydrothermal systems operation planning results in a large-scale problem. Due to this characteristic, it has been managed in stages, each one related to a different term. The focus of this project is the short term problem. The short term hydrothermal system operation planning consists on the determination of the system operating policy, aimed at minimizing the expected operating costs. Given the difficulties in making an accurate prediction with respect to the water inflows, such variables are modeled as random. In this context, this work aims at modeling and solving this optimization problem under the paradigm of Stochastic Programming. For that, this work presents mathematical models able to tackle the short-term operating planning for hydrothermal systems. The solution to the problem is obtained through the Progressive Hedging Method. A medium-scale problem test, consisting of a realistic hydrothermal configuration of the Brazilian Interconnected System, is used to evaluate the practical application of the solution method proposed.

Keywords: Hydrothermal Systems, Stochastic Programming, Progressive Hedging

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Efeito do Efeito do Remanso na Função Cota de Jusante...	9
Figura 2.2 –Vazão Turbinada Máxima em Função da Queda Líquida..	13
Figura 2.3 –Comportamento do Rendimento do Gerador.	15
Figura 2.4 – Curva Colina – Comportamento do Rendimento da Turbina.	16
Figura 2.5 –Potência Gerada e Limites Máximos de Turbinamento em Função da Vazão Turbinada e da Queda Líquida.	17
Figura 2.6 – Perfis de Vazões Afluentes Naturais ao Reservatório da Usina Hidrelétrica Itumbiara, na Bacia do Parnaíba (m^3/s).	18
Figura 2.7 – Perfil de Vazões Naturais Afluentes ao Reservatório da Usina Hidrelétrica Passo Fundo, na Bacia do Uruguai (m^3/s).....	19
Figura 2.8 – Permanência dos Módulos dos Desvios entre as Estimativas de Energias Naturais Afluentes para uma Semana a Frente e os Valores Verificados, para o Submercado Sudeste/Centro-Oeste.	20
Figura 3.1 – Árvores de Cenários Simples.	30
Figura 3.2 – Árvore de Cenários com Três Estágios e Quantidade de Realizações Limitadas a Duas.	31
Figura 3.3 – Cenários de uma Árvore de Cenários.	33
Figura 3.4 – Não-Antecipatividade	38
Figura 3.5 – Configuração Hidrelétrica para a Simulação Preliminar 1.	45
Figura 3.6 – Árvore de Cenários da Simulação Preliminar 1.	45
Figura 3.7 - Sistema Exemplo.	47
Figura 3.8 – Árvore de Cenários da Simulação Preliminar 2.	48
Figura 4.1 – Ilustração da Aproximação Linear por Partes de uma Função de Produção de uma Usina Hidrelétrica.	57
Figura 4.2 - Configuração Hidrotérmica do Problema Literal de Pequeno Porte.	67

Figura 4.3 – Árvore de Cenários do Problema Literal de Pequeno Porte.	68
Figura 6.1 - Sistema para a Aplicação Prática do <i>Progressive Hedging</i>	106
Figura 6.2 – Árvore de Cenários Utilizada na Simulação.....	107
Figura 6.3 – Dispersão de 30% para os Nós das Árvore de Cenários Estudadas.	108
Figura 6.4 – Dispersão de 10% para os Nós das Árvore de Cenários Estudadas.	108
Figura 6.5 – Índice de Inviabilidade Médio- \overline{IIP} por Iteração e Tempo de Execução.	119
Figura 6.6 – Índice de Inviabilidade Máximo - IIP_{max} , por Iteração e Tempo de Execução.....	119
Figura 6.7 – Viabilidade Primal - Permanência dos IIP_x	120
Figura 6.8 – Permanência dos IIP_x – Aproximação em Torno da Permanência de 5%.....	120
Figura 6.9 – Permanência dos IIP_x – Aproximação em Torno da Permanência de 1%.....	121
Figura 6.10 – Termos de Separabilidade Valores Assumidos pela Variável da UTE FAFEN para o 1º Estágio, 6ª Iteração (MW).	122
Figura 6.11 – Termos de Separabilidade e Valores Assumidos pela Variável da UTE Pernambuco para o 1º Estágio, 6ª Iteração. ...	123
Figura 6.12 – Termos de Separabilidade e Valores Assumidos pela Variável de Armazenamento da UHE Emborcação para o 1º Estágio, 6ª Iteração.	123
Figura 6.13 – Convergência da Função Objetivo (ΔF) para uma Dispersão de 10% para os Nós e Aproximação em Torno do Ponto de Convergência.	125
Figura 6.14 – Convergência da Viabilidade Primal para uma Dispersão de 10% para os Nós.	126

Figura 6.15 – Convergência da Função Objetivo (ΔF) para uma Dispersão de 30% para os Nós e Aproximação em Torno do Ponto de Convergência.....	127
Figura 6.16 – Convergência da Viabilidade Primal para uma Dispersão de 10% para os Nós.....	128
Figura 6.17 – Convergência dos Valores Médios dos Custos Marginais de Operação para o Primeiro Estágio – Dispersão de 10% para os Nós.	129
Figura 6.18 – Convergência dos Valores Médios dos Custos Marginais de Operação para o Primeiro Estágio – Dispersão de 30% para os Nós.	130

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Resultados da Simulação Preliminar 1.	46
Tabela 3.2 – Configuração do <i>Progressive Hedging</i>	49
Tabela 3.3 – Configuração da Aproximação Quadrática Diagonal.	49
Tabela 3.4 – Dados da Convergência dos Métodos Estudados.	50
Tabela 4.1 - Dados das Usinas Hidrelétricas.....	75
Tabela 4.2 – Vazões Incrementais aos Reservatórios (hm^3).	75
Tabela 4.3 - Dados das Usinas Termelétricas.	76
Tabela 4.4 - Solução Ótima do Problema Original.	76
Tabela 4.5 – Valor Esperado Das Vazões (hm^3).	77
Tabela 4.6 - Solução Ótima para o Problema.....	78
Tabela 4.7 – Resultado para Cada Nó Decorrente da Aplicação da Solução do Problema do Valor Esperado.....	78
Tabela 4.8 – Resultado para Cada Cenário e Esperado da Aplicação da Solução do Problema do Valor Esperado.....	79
Tabela 4.9 - Solução Ótima para o Cenário Alto.	80
Tabela 4.10 - Solução Ótima para o Cenário Médio.	80
Tabela 4.11 - Solução Ótima para o Cenário Baixo.....	80
Tabela 4.12 – Valor Esperado das Soluções Obtidas para os Cenários Independentes.....	81
Tabela 4.13 – Resultado para Cada Nó Decorrente da Aplicação do Valor Esperado das Soluções Obtidas para os Cenários Independentes.....	82
Tabela 4.14 – Resultado para Cada Cenário e Esperado da Aplicação do Valor Esperado das Soluções Obtidas para os Cenários Independentes.....	82

Tabela 6.1 – Dimensões dos Problemas para Cada Tipo de Decomposição.....	109
Tabela 6.2 – Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Uma Hora - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.....	113
Tabela 6.3 – Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Uma Hora - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.	113
Tabela 6.4 – Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Uma Hora - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.....	114
Tabela 6.5 - Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Duas Horas - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.	114
Tabela 6.6 - Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Duas Horas - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.	115
Tabela 6.7 – Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Duas Horas - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.....	115
Tabela 6.8 – Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Uma Hora – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.....	116
Tabela 6.9 - Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Uma Hora – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.	116
Tabela 6.10 - Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Uma Hora – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.....	117
Tabela 6.11 – Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Duas Horas – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.	117
Tabela 6.12 - Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Duas Horas – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.	117

Tabela 6.13 - Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Duas Horas – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.	118
Tabela A.1 – Configuração Termelétrica.	147
Tabela A.2 – Intercâmbios.	148
Tabela A.3 – Configuração Hidrelétrica – Dados Básicos.	148
Tabela A.4 – Configuração Hidrelétrica - Reservatórios.	149
Tabela A.5 – Coeficientes das Funções de Produção das Usinas Hidrelétricas.	150

NOTAÇÃO MATEMÁTICA

Planejamento da operação

E_j :	energia elétrica gerada;
Ep_j :	energia potencial gravitacional;
η_{tj} :	rendimento da turbina na transformação de energia potencial gravitacional em energia cinética;
η_{gj} :	rendimento do gerador na transformação de energia cinética em energia elétrica;
σ_{esp} :	produtibilidade específica da água (1.000 kg/m ³);
g :	aceleração da gravidade (9,81 m/s ²);
hl_j :	é a queda líquida na qual a unidade gerador j está submetida;
$turb_j$:	volume de água que passa pela turbina da unidade geradora j durante o intervalo de tempo Δt ;
P_j :	potência gerada pela unidade geradora (MW);
φ :	constante com o valor de 9,81 kg/m ² s ² .
hl_j :	queda líquida;
hb_j :	altura queda bruta (m);
pl_j :	perda de carga no canal de adução;
$fcm(arm)$:	função cota de montante (m);
arm :	volume armazenado (hm ³);

$a_0...a_4$:	são os coeficientes da função cota de montante;
$fcj(Qfc)$:	função cota de jusante ou curva chave (m);
Qcf :	vazão total na posição do canal de restituição (ou canal de fuga) (m ³ /s);
$b_0...b_4$:	são os coeficientes da função cota de montante;
$defl$:	vazão total defluente da usina (m ³ /s);
$turb$:	turbinada e restituída pelo canal de restituição (m ³ /s);
$vert$:	vazão vertida do usina (m ³ /s);
$sanit$:	vazão sanitária (m ³ /s);
n :	trecho do circuito hidráulico;
pl_n :	perda de carga no trecho n do circuito hidráulico (m);
vz_n :	vazão que passa pelo trecho (m ³ /s);
λ_n :	coeficiente de Hazen-Williams (tabelado);
$Diam_n$:	diâmetro do duto (m);
C_n :	comprimento do duto (m);
α_n :	constante de perdas para o trecho n (s ² /m ⁵);
UG_n :	é o conjunto de todos as unidades geradores que fazem uso do trecho de canal de adução n .
N_{ug} :	é o conjunto de todos os trecho do canal de adução por onde passa a vazão turbinada pela unidade geradora j .
Pn :	potência nominal (MW);
$turbl$:	é a máxima vazão turbinada para uma determinada situação de queda líquida;

h :	queda líquida à qual a turbina está submetida;
h_r :	queda de referência;
$turb_r$:	vazão de referência;
ς :	constante conhecida como expoente da turbina e depende essencialmente do tipo de turbina (tabelado);
η_{ug} :	rendimento do conjunto turbina-gerador, rendimento combinado da turbina e do gerador;
$\varphi_{0,ug} \dots \varphi_{5,ug}$:	são os coeficientes de eficiência conjunto turbina gerador ug . Esses coeficientes são determinados por um ajuste de curvas em torno de pontos obtidos por ensaio;
gt :	produção termelétrica;
ute :	índice de termelétricas;
UTE :	conjunto de usinas termelétricas;
def :	déficit de energia;
δ :	coeficiente da função de produção associado ao volume turbinado;
β :	coeficiente da função de produção associado ao volume armazenado final;
ct :	custo de produção termelétrica;
cd :	custo de déficit;
ss :	índice de subsistemas;
SS :	conjunto de subsistemas;
gh :	produção hidrelétrica;
uhe :	índice de hidrelétricas;
UHE :	conjunto de usinas hidrelétricas;

int :	intercâmbio de energia;
Dem :	demanda de energia;
$turb$:	volume turbinado;
arm :	volume armazenado;
$vert$:	volume vertido;
M_{uhe} :	conjunto de usinas à montante da usina uhe ;
Afl :	vazão afluente;
i :	índice da função linear utilizada para representar a função de produção;
I_{uhe} :	conjunto de funções lineares para representar a função de produção da usina uhe ;
γ_{uhe} :	coeficiente linear das funções lineares para representar a função de produção da usina hidrelétrica uhe .

Programação estocástica:

x :	variável de decisão (variável primal);
$f(x)$:	função objetivo de um problema de otimização;
G :	matriz de recursão;
H :	matriz de tecnologia;
b :	vetor independente;
Ω :	espaço amostral;
ω, ξ :	realizações para uma variável aleatória;
p_ω, p_s :	probabilidade de uma determinada realização ω e cenário s , respectivamente;

$s :$	determinado cenário;
$S :$	quantidade total de cenários;
$r :$	determinado nó da árvore de cenários;
$R_t :$	conjunto dos nós do estágio t ;
$q_t :$	índice de um determinado nó do estágio t ;
$Q_t :$	quantidade de nós do estágio t ;
$D(r) :$	conjunto de nós descendentes do nó r ;
$A(r) :$	conjunto composto pelo nó ancestral do nó r ;

Progressive Hedging

$c_j :$	j -ésima restrição complicadora;
$d(x) :$	conjunto de restrições;
$e(x) :$	conjunto de restrições;
$L :$	função Lagrangeana;
$\pi_j :$	multiplicador de Lagrange (variável dual) da j -ésima restrição complicadora;
$\theta(\pi) :$	função dual;
$\rho :$	parâmetro de penalidade;
$\Lambda(x, \pi) :$	função Lagrangeano aumentado;
$\psi(\pi) :$	função dual do Lagrangeano aumentado;
$J(x) :$	Jacobiano;
$\tilde{x} :$	termo de separabilidade;

$K_s(t):$	conjunto de cenários que compartilham o mesmo nó que s no estágio t , incluindo o próprio s ;
$f^i:$	valor da função objetivo na iteração i ;
$f^*:$	valor da função objetivo no ponto ótimo;
$IIP_x:$	Índice de Inviabilidade Primal da variável x ;
\overline{IIP}	Índice de Inviabilidade Primal Médio;
v	índice de variável primal;
$V:$	quantidade de variáveis primais.

SUMÁRIO

1.	<i>Introdução.....</i>	<i>1</i>
1.1.	Visão Geral do Trabalho	1
1.2.	Organização do Trabalho.....	1
2.	<i>Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos</i>	<i>3</i>
2.1.	Introdução	3
2.2.	Características Gerais do Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos.....	3
2.3.	A Produção de Energia pelas Usinas Hidrelétricas.....	5
2.3.1.	Altura de queda líquida	7
2.3.2.	Limitações da vazão turbinada.....	12
2.3.3.	Rendimento do conjunto turbina-gerador.....	14
2.3.4.	Análise da função de produção.....	16
2.4.	As Vazões Afluentes	18
2.5.	Etapas do Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos	20
2.6.	Revisão Bibliográfica	22
2.7.	Conclusões	27
3.	<i>Programação Estocástica</i>	<i>29</i>
3.1.	Introdução	29
3.2.	Modelagem das Incertezas	29
3.3.	Modelos Matemáticos	33

3.3.1.	Modelagem do problema por nós ou Equivalente Determinístico.....	36
3.3.2.	Modelagem do problema por cenários.....	37
3.4.	Métodos para Solução de Problemas de Programação Estocástica.....	40
3.4.1.	Decomposição Aninhada e Decomposição Regularizada.....	40
3.4.2.	Relaxação Lagrangeana.....	42
3.4.3.	Lagrangeano Aumentado, <i>Progressive Hedging</i> e Aproximação Quadrática Diagonal.....	43
3.5.	Avaliações Preliminares dos Métodos de Solução.....	44
3.5.1.	Simulação preliminar 1.....	44
3.5.2.	Simulação preliminar 2.....	47
3.6.	Conclusões	51

4. O Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos de Curto Prazo no Contexto da Programação Estocástica

4.1.	Introdução	53
4.2.	Planejamento da Operação de Curto prazo	54
4.3.	A Função de Produção das Usinas Hidrelétricas	56
4.4.	O Modelo Matemático	58
4.4.1.	O problema referente a um nó.....	58
4.4.2.	Modelo por nós ou Equivalente Determinístico.....	62
4.4.3.	Modelo por cenários.....	63
4.5.	Exemplo da Modelagem Matemática.....	67
4.5.1.	Problema literal de pequeno porte.....	67
4.5.2.	Exemplo do modelo por nós.....	68

4.5.3.	Exemplo do modelo por cenários.....	71
4.6.	A solução do Problema	74
4.6.1.	O problema.....	74
4.6.2.	A solução pela Programação Estocástica.....	76
4.7.	O Efeito da Aplicação de Simplificações ao Problema ..	77
4.7.1.	Simplificação 1: o problema do valor esperado	77
4.7.2.	Simplificação 2: análise de cenários independentes.....	79
4.8.	Conclusões	83
5.	<i>A Solução do Problema via Progressive Hedging</i>	85
5.1.	Introdução	85
5.2.	Relaxação Lagrangeana	86
5.3.	Lagrangeano Aumentado	88
5.4.	Avaliação dos Multiplicadores de Lagrange do Problema Dual do Lagrangeano Aumentado	90
5.5.	Progressive Hedging	94
5.6.	Aplicação do Progressive Hedging ao Problema Exemplo Literal de Pequeno Porte.....	98
5.7.	Conclusões	103
6.	<i>Implementação Computacional</i>	105
6.1.	Introdução	105
6.2.	O Problema de Médio Porte.....	105
6.3.	Parâmetros para a Avaliação da Função Objetivo e da Viabilidade da Solução Primal	110
6.4.	Avaliação da Partida a Quente	112
6.5.	Avaliação Parâmetro de Penalidade.....	115

6.6.	Avaliação da Viabilidade da Solução Primal	118
6.7.	Avaliação do Desempenho do Progressive Hedging em Relação a Outros Métodos de Solução para diversos cenários.	124
6.8.	Avaliação dos Multiplicadores de Lagrange– Custos Marginais de Operação (CMO)	128
6.9.	Conclusões	131
7.	<i>Conclusão</i>	133
7.1.	Contribuições e Conclusões do Trabalho	133
7.2.	Recomendações para Trabalhos Futuros	135
7.2.1.	Em relação à modelagem do problema.....	135
7.2.2.	Em relação aos métodos de solução de problemas de Programação Estocástica.....	136
7.2.3.	Em relação ao <i>Progressive Hedging</i>	136
	<i>Referências Bibliográficas</i>	139
	<i>Anexo A - Dados do Sistema de Médio Porte</i>	147

1. INTRODUÇÃO

1.1. VISÃO GERAL DO TRABALHO

Este trabalho tem o foco no problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo. O objetivo deste trabalho é contribuir para a compreensão das características e natureza do problema, bem como para a sua solução de forma eficiente e inovadora.

O problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo visa determinar uma política de operação, de modo que o mínimo custo de operação seja alcançado. Para este trabalho, a presença de incertezas referentes às vazões afluentes é a característica mais importante do problema, o que pode ser convenientemente tratado sob o paradigma da Programação Estocástica. Para resolver o problema em referência, este trabalho propõe o uso do método conhecido como *Progressive Hedging*, o qual aplica a estratégia de decompor o problema original de grande porte em subproblemas menores e mais fáceis de serem solucionados.

1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 2 contextualiza o problema em foco neste trabalho na cadeia de modelos utilizada no planejamento da operação do Sistema Interligado Nacional (SIN). As principais características da operação de sistemas hidrotérmicos são apresentadas, com especial atenção dada às características operativas das unidades hidráulicas e às vazões afluentes. A produção hidrelétrica depende das vazões afluentes, as quais têm natureza aleatória e devem ser devidamente tratadas. Ainda nesse capítulo, uma revisão bibliográfica sobre o tratamento de incertezas em diversos problemas de sistemas de energia elétrica é apresentada.

A Programação Estocástica, área da matemática aplicada destinada a estudar otimização sob condições de incerteza, é apresentada no Capítulo 3. Nesse capítulo é apresentada a árvore de cenários, estrutura sob a qual as incertezas são modeladas no problema de otimização. Dois

modelos para a representação de problemas de Programação Estocástica são apresentados: o modelo por nós e o modelo por cenários. Encontra-se ainda nesse capítulo uma revisão bibliográfica dos principais métodos de solução de problemas empregados na Programação Estocástica e resultados de simulações preliminares com alguns desses métodos. A partir desta revisão bibliográfica e das simulações preliminares, o método *Progressive Hedging* é identificado como potencialmente interessante para a solução do problema em questão e merecedor de estudos mais detalhados, os quais são apresentados nos capítulos seguintes.

Na sequência, no Capítulo 4 são apresentadas as características do problema referente ao curto prazo. O problema é então modelado no contexto da Programação Estocástica, sendo que um problema literal de pequeno porte é utilizado para exemplificar a modelagem. Ao final do capítulo, exemplos numéricos são utilizados para ilustrar a motivação da utilização da Programação Estocástica.

Após modelado o problema, passa-se para a estratégia de solução. No Capítulo 5, o método de solução conhecido como *Progressive Hedging* é apresentado. Seus vínculos com a Relaxação Lagrangeana e o Lagrangeano Aumentado são apresentados e comentados. O problema literal de pequeno porte introduzido no Capítulo 4 é utilizado para ilustrar a aplicação do *Progressive Hedging*.

No Capítulo 6, um estudo da aplicação prática do *Progressive Hedging* na solução de um problema de médio porte é apresentado. Diversas questões fundamentais do método são estudadas a partir de resultados práticos, como por exemplo, a inicialização de parâmetros, a aplicação de partidas a quente e o comportamento dos multiplicadores de Lagrange. O seu desempenho é então comparado ao da Decomposição Aninhada, método de solução comumente utilizado para a solução do problema.

Por fim, as principais conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 7.

2. PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

2.1. INTRODUÇÃO

Este trabalho trata do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos. Para sistemas dessa natureza, com expressiva quantidade de usinas hidrelétricas, é essencial que haja um planejamento que vise assegurar o uso racional dos recursos hídricos. Esse planejamento deve resultar em uma política de operação que minimize o custo de operação do sistema.

Adicionalmente, esse planejamento deve considerar em detalhes as características do sistema, apresentadas na seqüência, o que confere uma elevada complexidade ao problema. Devido a essa complexidade, o planejamento costuma ser realizado em etapas. Em cada etapa, o detalhamento das características do sistema deve estar de acordo com o horizonte considerado: no curto prazo, os elementos físicos do sistema são mais bem detalhados, enquanto no longo prazo a modelagem das incertezas tem mais destaque.

Este capítulo objetiva apresentar as características gerais do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos.

2.2. CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

Planejar a operação de um sistema de energia elétrica significa definir a estratégia de operação das usinas para o presente, observando seu impacto futuro e atendendo a um determinado objetivo (em geral, atender a demanda a um mínimo custo). Assim, o planejamento da operação é essencialmente um problema de otimização.

Para que a política de operação resultante do planejamento possa ser posta em prática, as diversas características do sistema de geração, da transmissão e da demanda devem ser adequadamente modeladas.

Uma característica importante dos sistemas com usinas hidrelétricas é a capacidade de armazenar energia na forma de água nos reservatórios. Assim, a geração de energia elétrica pelas usinas hidrelétricas é limitada pela quantidade de água armazenada nos reservatórios. Além disso, o uso do reservatório no presente tem repercussão na disponibilidade de água no futuro e, por conseguinte, nas decisões operativas para o futuro.

Em sistemas com pouca ou nenhuma regularização, isto é, com pouca ou nenhuma capacidade transferir água de um período para outro, os impactos da operação realizada no presente desaparecem em pouco tempo. Quando a capacidade de regularização é expressiva, pode ser necessário avaliar a operação para um horizonte de alguns anos, como é o caso do sistema brasileiro.

Também é necessário considerar que, devido à disposição das usinas hidrelétricas em cascatas, a decisão operativa para uma usina influencia diretamente a operação das outras à jusante. Assim, a decisão operativa para as diversas usinas de uma cascata deve ser tomada de forma coordenada.

Outra característica importante dos sistemas hidrotérmicos é a presença de incertezas. A demanda de energia, a disponibilidade das usinas hidrelétricas e do sistema de transmissão e as vazões afluentes são exemplos de variáveis aleatórias. Dessas fontes de incerteza, no contexto do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, a atenção deve ser voltada às vazões afluentes. A impossibilidade de realizar uma previsão com alto grau de confiança para mais do que alguns dias à frente sustenta a necessidade de um tratamento especial para as vazões afluentes. Algumas das características das vazões afluentes são apresentadas na Seção 2.4.

Além da utilização para a geração de energia elétrica, a água tem outros usos, tais como: navegação e captação para irrigação e abastecimento de cidades. Além da modelagem desses usos, devem ser considerados no planejamento da operação os tempos de viagem da água entre os reservatórios, a evaporação e a infiltração.

A produção de energia elétrica pelas usinas hidrelétricas se dá pela transformação de outras formas de energia, quais sejam, a potencial e a mecânica. A energia elétrica resultante é função da vazão turbinada, dos níveis de montante e jusante, das perdas nos canais de adução e dos rendimentos da turbina e do gerador. A função de produção de energia

das usinas hidrelétricas é complexa e sua modelagem é de grande importância para o problema tratado neste trabalho. Assim, essa função será discutida com mais detalhes na Seção 2.3.

Com respeito às usinas termelétricas, o aspecto mais trivial a ser considerado é o custo do combustível para a operação, que pode ser modelado por uma função quadrática. Adicionalmente, têm-se os custos durante os processos de partida e de parada das unidades geradoras. Além do custo envolvido na partida e na parada de unidades termelétricas, é necessário considerar que, devido a fatores termodinâmicos da caldeira, esses processos são lentos. Essas últimas condições costumam ser modeladas pelas restrições de rampa e de tempos mínimos para a partida e a parada. Em alguns casos existe uma restrição de potência mínima, devido a questões contratuais (por exemplo, consumo mínimo de combustível contratual) ou para manter certas condições operativas no sistema elétrico.

As usinas e os centros de carga são conectados por linhas de transmissão. Esse acoplamento elétrico possibilita a realização de uma operação coordenada entre todas as usinas, trazendo benefícios ao sistema. Exemplos desses benefícios são o aproveitamento da complementaridade hidrológica entre bacias hidrográficas distintas e a importação de energia com custo de produção inferior ao custo da energia produzida no centro de carga onde será consumida.

2.3. A PRODUÇÃO DE ENERGIA PELAS USINAS HIDRELÉTRICAS

Para uma determinada unidade geradora j , o processo de transformação da energia potencial em elétrica é representado pela Eq. (2.1):

$$E_j = Ep_j \eta_t \eta_{g_j} \quad (2.1)$$

onde:

- E_j : é a energia elétrica gerada na saída do gerador (Wh);
- Ep_j : é a energia potencial gravitacional (Wh);
- η_{tj} : é o rendimento da turbina na transformação de energia potencial gravitacional em energia mecânica;
- η_{gj} : é o rendimento do gerador na transformação de energia mecânica em energia elétrica.

A energia potencial é função da queda líquida durante o intervalo de tempo Δt . Assim, a energia potencial que pode ser transformada em energia mecânica pela turbina da unidade geradora j pode ser escrita como:

$$Ep_j = \sigma_{esp} \cdot g \cdot hl_j \cdot turb_j \cdot \Delta t \quad (2.2)$$

onde:

- σ_{esp} : é a produtibilidade específica da água (1.000 kg/m³);
- g : é a aceleração da gravidade (9,81 m/s²);
- hl_j : é a queda líquida na qual a unidade geradora j está submetida (m);
- $turb_j$: é a vazão de água que passa pela turbina da unidade geradora j (m³/s).

A potência elétrica fornecida pelo gerador é expressa pela Equação (2.3):

$$P_j = \varphi \cdot \eta_{tj} \cdot \eta_{gj} \cdot hl_j \cdot turb_j \quad (2.3)$$

onde:

P_j : é a potência gerada pela unidade geradora (W);

φ : é uma constante com o valor de $9,81 \text{ kg/m}^2\text{s}^2$.

Pela Equação (2.3) pode-se observar que a potência elétrica gerada depende dos rendimentos da turbina e do gerador, da queda líquida e da vazão turbinada. Essas variáveis, por sua vez, são interdependentes, o que agrega complexidade ao problema. Nas próximas subseções estas variáveis serão estudadas em mais detalhes.

2.3.1. Altura de queda líquida

Conforme visto anteriormente, a potência gerada é proporcional à altura de queda líquida. Essa, por sua vez, é função do volume de água armazenado no reservatório, do nível de água no canal de restituição, da vazão de água nos canais de adução e das características de rugosidade do canal de adução. A relação da queda líquida com todas essas variáveis é apresentada a seguir. Inicialmente, considere a equação da altura de queda líquida conforme apresentada em (2.4):

$$hl_j = hb_j - pl_j \quad (2.4)$$

onde:

hb_j : é a altura queda bruta (m);

pl_j : é a perda no canal de adução (m).

A altura de queda líquida é definida como a diferença entre a altura de queda bruta e as perdas de carga. A altura de queda bruta, por sua vez, é a diferença entre as cotas de montante e de jusante, conforme apresentado em (2.5):

$$hb_j = fcm(arm) - fcj(Qcf) \quad (2.5)$$

onde:

- $fcm(arm)$: é a função cota de montante (m);
 $fcj(Qcf)$: é a função cota de jusante ou curva chave (m);
 arm : é o volume de água armazenado no reservatório (hm^3);
 Qcf : é a vazão total na posição do canal de restituição (ou canal de fuga) (m^3/s).

As funções cota de montante e cota de jusante são curvas ajustadas a partir de pontos obtidos por medições de campo. Os polinômios resultantes para as cotas de montante e de jusante são, geralmente (no Brasil), de quarto grau, conforme apresentados em (2.6) e (2.7), respectivamente:

$$fcm(arm) = a_0 + a_1arm + a_2arm^2 + a_3arm^3 + a_4arm^4 \quad (2.6)$$

$$fcj(Qcf) = b_0 + b_1Qcf + b_2Qcf^2 + b_3Qcf^3 + b_4Qcf^4 \quad (2.7)$$

Note que a cota de jusante pode depender de outros fatores além da vazão turbinada pela usina. Exemplos desses fatores são as vazões

vertidas e sanitárias¹, o remanso do reservatório imediatamente à jusante (cujo efeito na função cota de jusante é ilustrado na Figura 2.1), conexões com outros rios, transposição de entre rios, entre outros. Assim, por motivo de simplificação, Q_{cf} será tratada daqui por diante como a vazão defluente total da usina, $defl$, conforme (2.8):

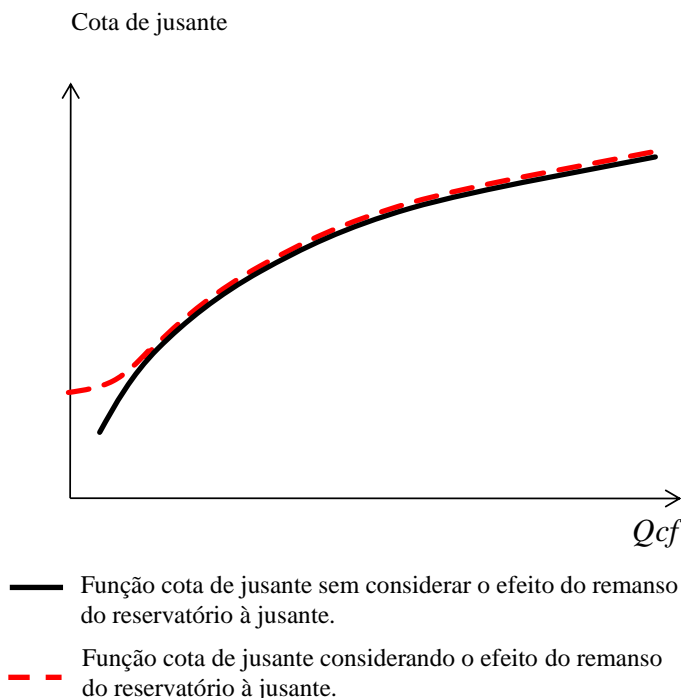


Figura 2.1 – Efeito do Efeito do Remanso na Função Cota de Jusante.

¹ Vazão sanitária é a mínima vazão defluente que deve ser mantida em um trecho ou alça de rio por razões ambientais.

$$Q_{cf} = defl = turb + vert + sanit \quad (2.8)$$

onde:

defl : é a vazão defluente da usina (m^3/s);

turb : é a vazão turbinada e restituída pelo canal de restituição (m^3/s);

vert : é a vazão vertida do usina (m^3/s);

sanit : é a vazão sanitária (m^3/s).

Definida a queda bruta como a diferença entre as cotas de montante e de jusante, falta definir a perda de energia potencial gravitacional para que se possa concluir o estudo referente à queda líquida. Tais perdas, também conhecidas como perdas de carga, resultam principalmente do atrito da água nos vários trechos do circuito hidráulico. Para cada trecho n do circuito hidráulico, pode-se calcular a perda de carga como função das características do canal de adução (comprimento, largura e rugosidade) e da vazão, conforme descrito pela equação de Hazen-Willians (Souza, 1983):

$$pl_n = 10,643 \cdot v_{z_n}^{1,85} \cdot \lambda_n^{-1,85} \cdot Diam_n^{-4,87} \cdot C_n \quad (2.9)$$

onde:

pl_n : é a perda de carga no trecho n do circuito hidráulico (m);

v_{z_n} : é a vazão que passa pelo trecho (m^3/s);

λ_n : é o coeficiente de Hazen-Willians;

$Diam_n$: é o diâmetro do duto (m);

C_n : é o comprimento do duto (m).

Por simplificação, costuma-se calcular as perdas em um determinado trecho pela seguinte equação:

$$pl_n = \alpha_n \cdot vz_n^2 \quad (2.10)$$

onde:

α_n : é conhecida como constante de perdas referente ao trecho n (s²/m⁵).

Por sua vez, vz_n é igual ao somatório das vazões turbinadas pelas unidades geradoras que compartilham o trecho n do canal de adução:

$$vz_{ug} = \sum_{ug \in UG_n} turb_{ug} \quad (2.11)$$

onde:

UG_n : é o conjunto de todos as unidades geradores que fazem uso do trecho de canal de adução n .

A perda de carga resultante para uma determinada unidade geradora é composta pela soma das perdas de carga dos diversos trechos que compõe seu canal de adução, inclusive os trechos compartilhados com outras unidades:

$$pl_{ug} = \sum_{n \in N_{ug}} pl_n \quad (2.12)$$

onde:

N_{ug} : é o conjunto de todos os trechos do canal de adução por onde passa a vazão turbinada pela unidade geradora ug .

Pelas Equações (2.10), (2.11) e (2.12) percebe-se que as perdas relacionadas a uma determinada unidade geradora podem depender das vazões turbinadas nas demais unidades geradoras.

2.3.2. Limitações da vazão turbinada

Para compreender melhor alguns aspectos referentes à vazão turbinada por uma unidade geradora é preciso entender o conceito de queda de referência ou queda nominal. A queda de referência refere-se ao valor de queda líquida para a qual a turbina com seu distribuidor totalmente aberto fornece a potência nominal do gerador. Assim, para valores de queda líquida menores do que a queda de referência a vazão turbinada é limitada pela turbina, enquanto que para quedas líquidas maiores a vazão turbinada é limitada pela máxima potência mecânica no eixo do gerador. Essa situação é ilustrada na Figura 2.2:

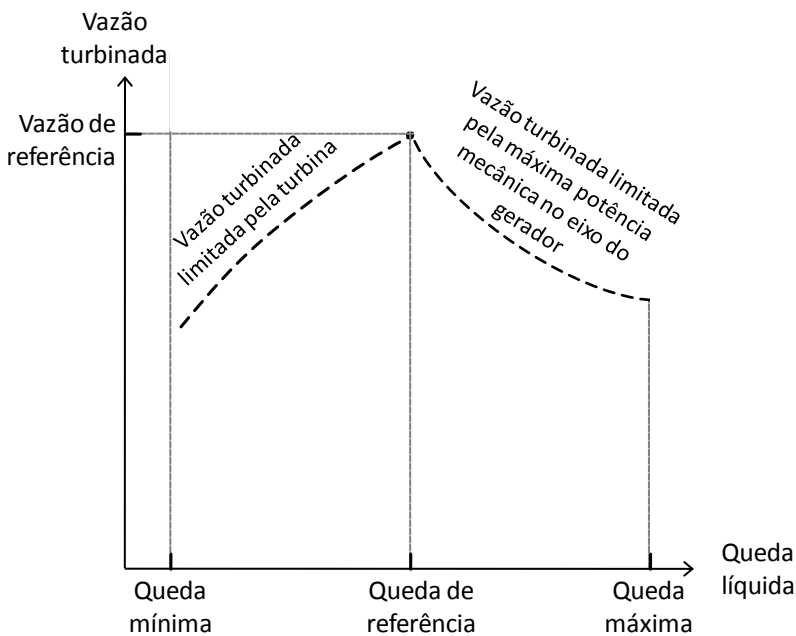


Figura 2.2 –Vazão Turbinada Máxima em Função da Queda Líquida.

Caso a queda líquida seja maior do que a queda de referência, o limite de vazão turbinada é determinado por (2.13):

$$turbl = \frac{Pn}{9,81 \times 10^{-3} h_l \eta_t \eta_g} \quad (2.13)$$

onde:

$turbl$: é o limite da vazão turbinada (m^3/s);

Pn : é a potência nominal do gerador (MW);

h_l : é queda líquida à qual a turbina está submetida (m).

Caso a queda líquida seja menor do que a queda de referência, o limite de vazão turbinada é determinado por (2.14):

$$turbl = \left(\frac{hl}{hr} \right)^{\varsigma} turbr \quad (2.14)$$

onde:

hr : é a queda de referência;

$turbr$: é vazão de referência;

ς : é uma constante conhecida como expoente da turbina e depende essencialmente do tipo de turbina (tabelado).

2.3.3. Rendimento do conjunto turbina-gerador

O comportamento do rendimento do gerador é função de uma única variável (a potência no eixo do gerador), conforme apresentado na Figura 2.3, e pode ser modelada como uma função quadrática.

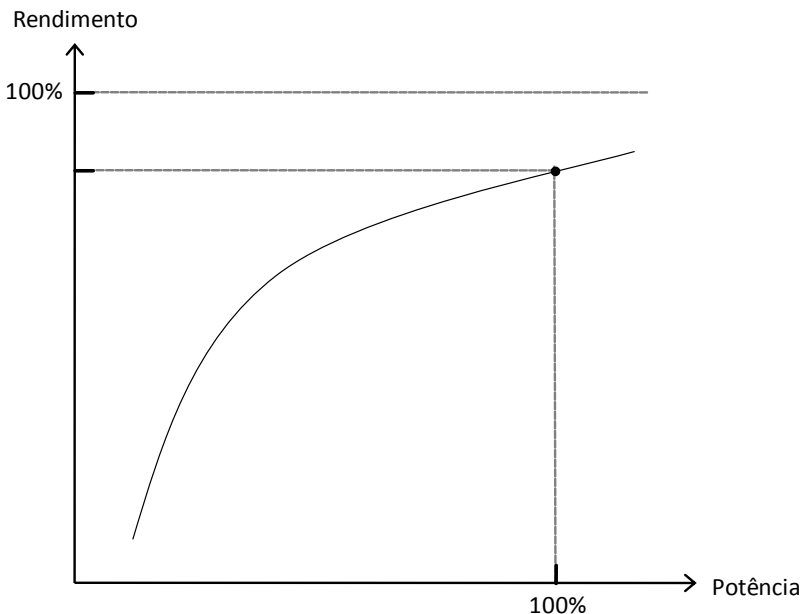


Figura 2.3 –Comportamento do Rendimento do Gerador.

O rendimento da turbina, por outro lado, é bem mais complexo. Esse rendimento costuma ser modelado pela equação quadrática (2.15) e depende da queda líquida e da vazão turbinada.

$$\eta_{ug} = \eta_{t,ug} \eta_{g,ug}$$

$$\eta_{ug} = \varphi_{0,ug} + \varphi_{1,ug} \text{turb}_{ug} + \varphi_{2,ug} \text{hl}_{ug} + \varphi_{3,ug} \text{hl}_{ug} \text{turb}_{ug} + \varphi_{4,ug} \text{turb}_{ug}^2 + \varphi_{5,ug} \text{hl}_{ug}^2 \quad (2.15)$$

Onde:

$\varphi_{0,ug} \dots \varphi_{5,ug}$: são os coeficientes de eficiência conjunto turbina gerador ug .

A interpretação gráfica do rendimento da turbina é feita por meio de uma curva-colina, apresentada na Figura 2.4. Por essa figura, pode-se observar a vazão e a queda de projeto, ponto na qual a turbina é projetada para ter o maior rendimento.

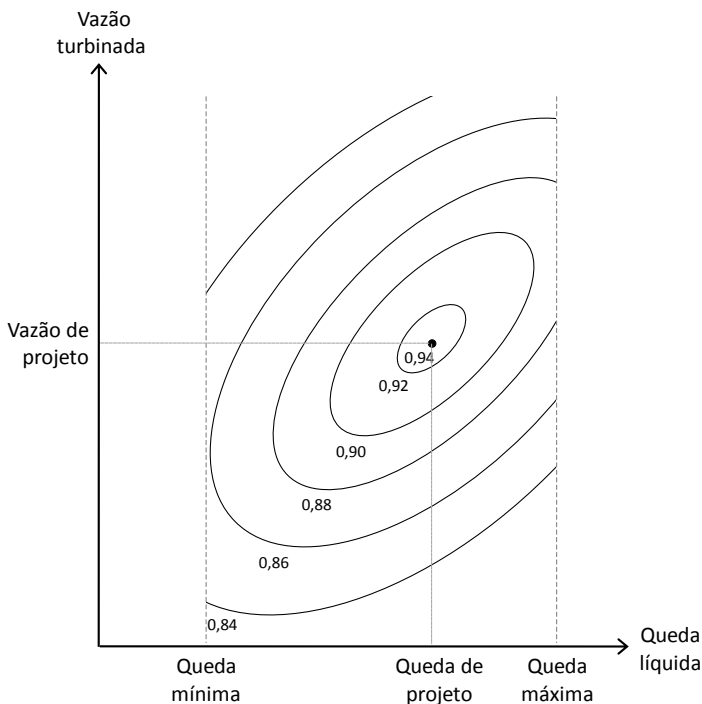


Figura 2.4 – Curva Colina – Comportamento do Rendimento da Turbina.

2.3.4. Análise da função de produção

Conforme apresentado anteriormente, a produção de energia de uma unidade hidrelétrica é resultado de diversas características complexas. Sobrepondo todos os efeitos discutidos nas subseções anteriores (queda líquida, rendimento do conjunto turbina-gerador e limitações de vazão

turbinada), pode-se esboçar a função de produção de energia elétrica pelo gerador conforme a Figura 2.5:

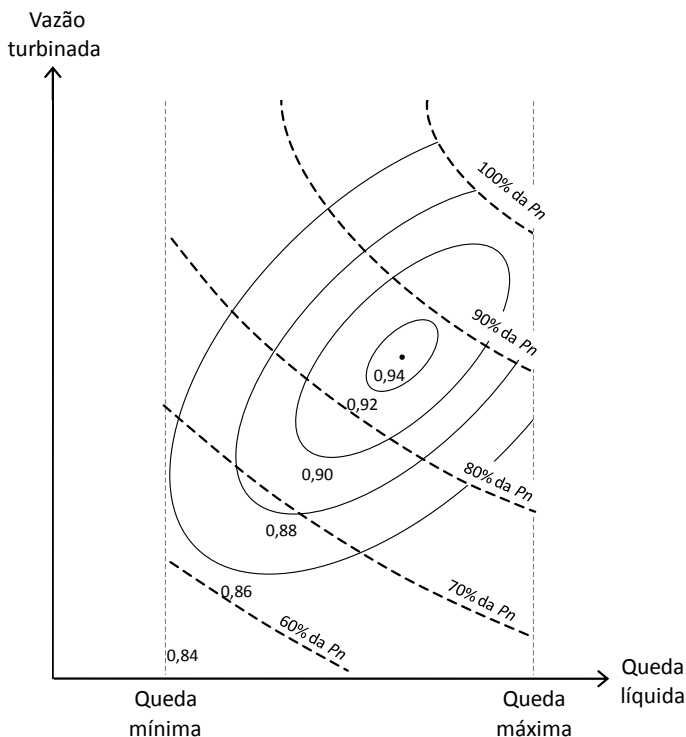


Figura 2.5 –Potência Gerada e Limites Máximos de Turbinamento em Função da Vazão Turbinada e da Queda Líquida.

Pela Figura 2.5 pode-se determinar de forma gráfica o rendimento e a potência fornecida pelo gerador para cada queda líquida e vazão líquida.

Neste trabalho, a função de produção é modelada como uma função linear por partes. Os detalhes dessa modelagem são apresentados são apresentados na Seção 4.3.

2.4. AS VAZÕES AFLUENTES

As vazões afluentes a um determinado reservatório são função de diversos fatores hidroclimáticos, dentre os quais destacam-se os fenômenos geofísicos, a precipitação, a infiltração, a evaporação e a transpiração (Garcez *et al.*, 1988; Pinto *et al.*, 1976; Tucci *et al.*, 2003). Por sua vez, esses fatores são dependentes de outras variáveis; temperatura, radiação solar, vento, influência humana e características geológicas e vegetais.

As vazões afluentes apresentam um comportamento sazonal, geralmente bem definido. Não obstante, ainda que se conheça esse comportamento, as afluições apresentam historicamente uma grande variação de um ano para outro. A título de ilustração, o perfil de vazão natural afluente ao reservatório da usina Itumbiara, na Bacia do Parnaíba, é apresentado na Figura 2.6. Por essa figura é possível verificar que as afluições podem apresentar valores muito diferentes da média, especialmente nos meses mais úmidos (período de dezembro a abril).

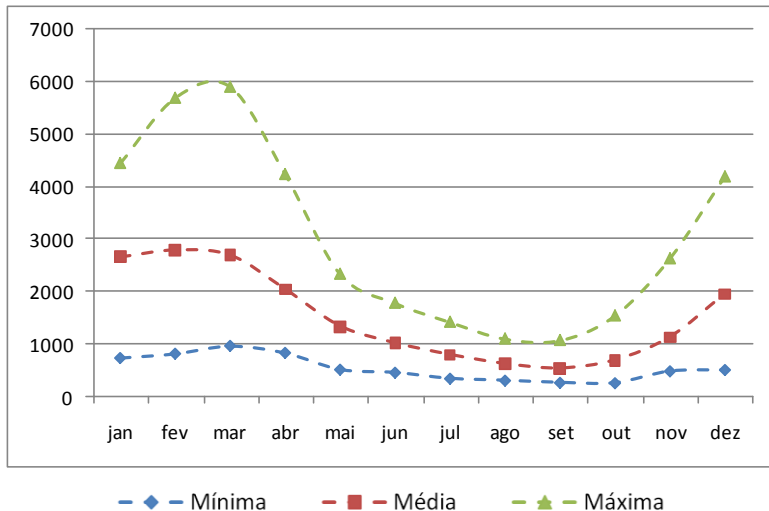


Figura 2.6 – Perfis de Vazões Afluentes Naturais ao Reservatório da Usina Hidrelétrica Itumbiara, na Bacia do Parnaíba (m^3/s).

Além da grande variabilidade de um ano para outro, é possível verificar que os perfis de bacias distintas podem ser complementares, pela comparação entre as Figuras 2.6 e 2.7. Enquanto a Bacia do Paranaíba tem o seu momento úmido entre dezembro e abril, o período úmido na Bacia do Uruguai fica entre maio e outubro. Essa característica corrobora com o planejamento coordenado da operação.

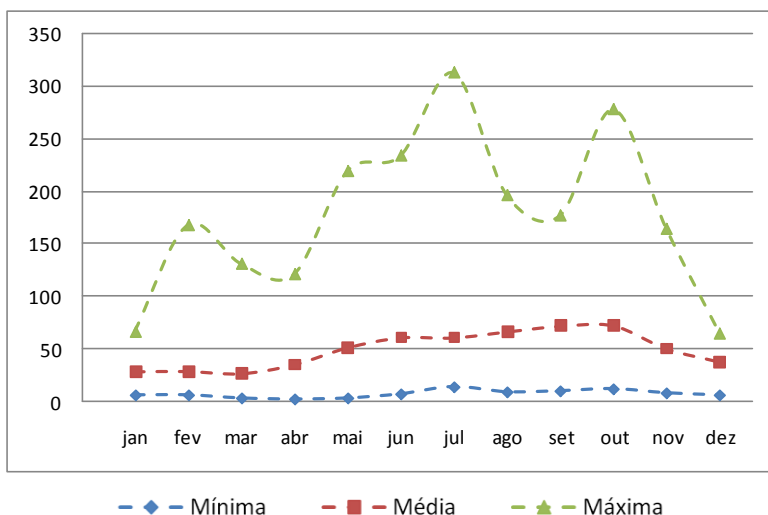


Figura 2.7 – Perfil de Vazões Naturais Afluentes ao Reservatório da Usina Hidrelétrica Passo Fundo, na Bacia do Uruguai (m^3/s).

Ao avaliar as estimativas semanais realizadas para o planejamento da operação de curto prazo do SIN, observa-se que pode haver grandes desvios em relação às afluições verificadas. A Figura 2.8 apresenta a permanência dos desvios dos valores estimados e verificados para a Energia Natural Afluyente (ENA) para o Subsistema Sudeste/Centro-Oeste, em módulo. Para essa figura foram utilizadas as estimativas para uma semana à frente que foram utilizadas no planejamento da operação de curto prazo do SIN. Tais dados foram disponibilizados pelo ONS e correspondem ao período de janeiro de 2008 a novembro de 2009. Por essa figura pode-se observar que as estimativas tiveram desvios em relação aos valores verificados superiores a 10% em mais de 50% dos

casos. Observa-se, ainda, que o maior desses desvios chegou a 60%. Essa figura ilustra a dificuldade em se realizar uma estimativa confiável para uma semana à frente.

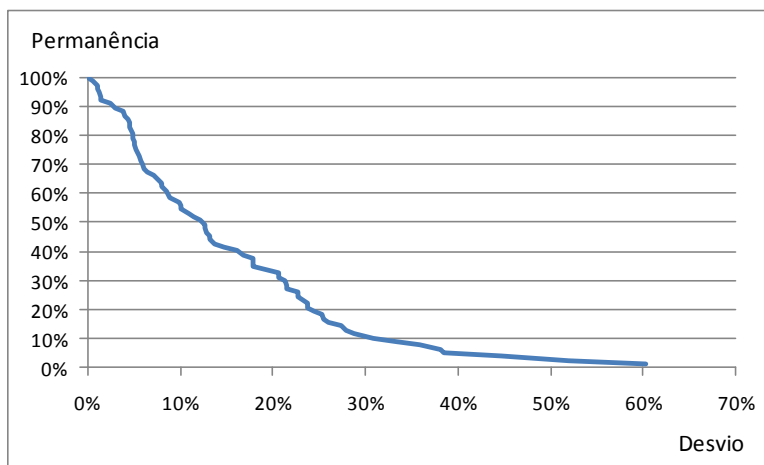


Figura 2.8 – Permanência dos Módulos dos Desvios entre as Estimativas de Energias Naturais Afluentes para uma Semana à Frente e os Valores Verificados, para o Submercado Sudeste/Centro-Oeste.

2.5. ETAPAS DO PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

Devido às características descritas anteriormente, o modelo matemático do problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos tem as seguintes características:

- é acoplado no tempo: devido ao armazenamento de água nos reservatórios e aos fatores termodinâmicos das usinas termelétricas, as decisões operativas presentes e futuras devem ser tomadas em conjunto;
- possui um longo período de estudo: devido à existência de grandes reservatórios de regularização plurianual;

- é acoplado no espaço: o impacto da operação de uma determinada usina pode ter repercussão na operação das demais usinas à jusante na cascata;
- é acoplado eletricamente: devido à existência de grandes sistemas de transmissão, a operação de todas as usinas do sistema deve ser realizada coordenadamente. Especificamente para as usinas hidrelétricas, esse acoplamento elétrico possibilita aproveitar a complementaridade hidrológica entre as diversas bacias hidrográficas;
- é não-determinístico: as incertezas referentes às vazões afluentes tornam o problema essencialmente estocástico;
- é não-linear: relativo à função de produção das usinas hidrelétricas e ao custo de operação das termelétricas;
- é grande porte: a conjunção de todos os fatores apresentadas nos itens anteriores associada às dimensões do sistema (quantidade de reservatórios, usinas, transmissão e centros de carga) leva a um problema de grande porte e de difícil solução.

Conforme apresentado anteriormente, o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos é um problema de grande porte. Sendo assim, é interessante realizar sua divisão em problemas menores, isolando características particulares, de modo que possam ser tratados mais adequadamente por modelos específicos.

No caso brasileiro, a atual estrutura de tratamento do planejamento da operação consiste em uma cadeia de estudos composta pelas seguintes etapas (Maceira *et al.*, 2002):

Planejamento de médio prazo:

Calcula a política de operação de médio prazo;

Horizonte: até cinco anos;

Discretização: mensal;

Representação dos fenômenos: reservatórios equivalentes de energia e modelo linearizado para a rede elétrica.

Planejamento de curto prazo:

Calcula a política de operação de curto prazo;

Horizonte: até um ano;

Discretização: semanal e mensal;

Representação dos fenômenos: modelo individualizado para as usinas hidrelétricas e modelo linearizado para a rede elétrica.

Programação diária:

Programação da operação de curto prazo;

Horizonte: de uma a duas semanas;

Discretização: horária.

Note que cada etapa da cadeia refere-se a um diferente horizonte de planejamento, considerando diferentes graus de incerteza e níveis de detalhamento (ONS, 2007; Fortunato *et al.*, 1990). Quanto menor o horizonte de uma determinada etapa, maior é o detalhamento em relação aos elementos do sistema. Por outro lado, a representação das incertezas ganha importância nas etapas com horizontes maiores.

Uma descrição sucinta sobre os modelos computacionais utilizados nas etapas do planejamento da operação no Sistema Interligado Nacional é apresentada em Rodrigues (2001) e Maceira et al. (2002).

2.6. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conforme apresentado anteriormente neste capítulo, existem incertezas inerentes ao planejamento de sistemas de energia elétrica. No caso específico da operação sistemas hidrotérmicos, escopo deste trabalho, as incertezas mais expressivas estão relacionadas com as vazões afluentes.

Na área de sistemas de energia elétrica, encontram-se diversas aplicações que apresentam as incertezas modeladas como variáveis aleatórias e tratam os problemas resultantes pela Programação Estocástica. Essas aplicações tratam de diversos tipos de problemas (planejamento e programação da operação com diversos objetivos, oferta em leilões de curto prazo, carteira de contratos e expansão da geração e da transmissão, entre outros) em diversos sistemas (hidrelétrico, térmicos, eólicos, com biomassa e mistos).

Assim, nesta seção é apresentada uma revisão bibliográfica referente aos problemas de sistema de energia associados a incertezas. Todas as referências citadas a seguir fazem uso da Programação Estocástica. Wallace *et al.* (2003) apresenta uma revisão geral sobre problemas de Programação Estocástica em sistemas de energia.

Referência de aplicação a um problema similar ao tratado neste trabalho é encontrada em Li *et al.* (1990). Nesse artigo, o problema consiste na minimização do custo de operação termelétrica, considerando uma função de custo futuro para o armazenamento de água nos reservatórios ao fim do horizonte de planejamento. As vazões afluentes são modeladas como variáveis aleatórias. O método de solução utilizado é chamado de Decomposição-Coordenação e consiste em aplicar a Relaxação Lagrangeana para decompor o problema original em subproblemas, cada um referente a uma usina (seja termelétrica ou hidrelétrica), que são resolvidos pela Programação Dinâmica Estocástica.

O problema tratado em Jha *et al.* (2008) consiste no planejamento da operação de uma única usina hidrelétrica. O objetivo é maximizar a produção de energia elétrica. As vazões afluentes são modeladas como variáveis aleatórias. O problema é resolvido por Programação Dinâmica Estocástica.

Escudero *et al.* (2000) propõe uma plataforma para operação de reservatórios. Este trabalho é inspirado em uma bacia da península Ibérica, na qual o consumo de água para outros usos (que não a produção de energia elétrica) é bastante expressivo. As vazões afluentes e os “outros usos da água” são modelados como variáveis aleatórias. O objetivo é minimizar desvios em relação a metas para armazenamento, vazões ecológicas, usos para usinas hidrelétricas e bombeamento de aquíferos. A solução é obtida por meio do Lagrangeano Aumentado.

Em Bicaud *et al.* (2001), o problema tratado consiste na programação da operação de sistemas hidrotérmicos com o objetivo de minimizar o custo de produção tratando a demanda de energia como variável aleatória. A Relaxação Lagrangeana é aplicada para decompor o problema em diversos subproblemas menores, cada um referente a uma determinada unidade geradora. O problema dual é tratado por um pré-condicionador e resolvido por um método de feixes.

Em Archibald *et al.* (1999), o problema da maximização do lucro obtido com a venda da energia elétrica é abordado. As afluições são modeladas como função do clima (umidade) e da taxa de escoamento das chuvas, que, por sua vez, são modeladas como variáveis aleatórias. O artigo compara a solução pelos métodos Simplex Revisado, Decomposição Aninhada, Programação Dinâmica Completa (onde todos os reservatórios do problema são considerados simultaneamente) e a Programação Dinâmica Decomposta (onde um problema de Programação Dinâmica é resolvido para cada reservatório e uma heurística é utilizada para coordenar os resultados). A Decomposição Aninhada se mostrou mais interessante para a solução do problema tratado.

Em Gröwe-Kuska *et al.* (2000), as restrições de atendimento à demanda e de reserva girante são relaxadas. Como resultado, obtém-se um subproblema inteiro-misto linear para cada unidade geradora.

Além da estratégia de solução em apresentada Gröwe-Kuska *et al.* (2000), Caroe *et al.* (1998) apresenta uma decomposição por cenários. Os subproblemas resultantes são resolvidos pelo CPLEX [ILOG, 2001] e o Problema Dual é resolvido pelo método de feixes.

Nolde *et al.* (2008) trata da operação de sistemas hidrotérmicos. O problema é dividido em duas etapas, uma de planejamento (onde as afluições e a demanda são modeladas como variáveis aleatórias) e outro de operação em tempo real (onde considera-se ser um problema determinístico). O resultado do modelo de mais longo prazo é a vazão defluente de cada usina hidrelétrica, que é tratada como dado de entrada para o modelo de operação em tempo real. As vazões afluentes e defluentes, assim como os volumes armazenados, são tratadas pelos seus equivalentes em energia calculados a priori, de modo que a função de produção das hidrelétricas não considera as variações de queda líquida. O problema estocástico é resolvido pela Decomposição Aninhada.

Contextualizados no Nord Pool, Fleten *et al.* (2006 e 2008) tratam dos problemas da comercialização de energia elétrica e de planejamento da produção das usinas hidrelétricas para um dia à frente. O objetivo é a maximização do lucro (da venda da energia, subtraídos os custos de partida e penalizando vertimentos). Os dois problemas são tratados de forma encadeada. O primeiro problema, tratado em Fleten *et al.* (2008), consiste na definição da oferta de energia em um leilão para um dia à frente, onde os preços são variáveis aleatórias. O problema da oferta de energia é modelado em dois estágios, sendo que o primeiro consiste na oferta propriamente dita para as 24 horas do dia seguinte, enquanto o segundo consiste na operação para o dia seguinte. Após os resultados do leilão se tornarem conhecidos, o problema da programação da operação para o dia seguinte, tratado em Fleten *et al.* (2006), é resolvido. Em tal problema, não somente os preços, mas também as vazões afluentes são modelados como variáveis aleatórias. O problema é tratado para um horizonte de uma semana e com uma discretização horária. Ambos os problemas são resolvidos pelo CPLEX na forma de um problema único de programação inteira-mista.

O problema tratado em Shrestha *et al.* (2004) consiste na definição da oferta de energia e na operação de usinas termelétricas pertencentes a um mesmo agente, em um contexto onde a operação é descentralizada e orientada unicamente por mecanismos de mercado. O preço (spot) da energia é a variável aleatória do problema. O problema é decomposto pelo uso da Relaxação Lagrangeana, resultando em subproblemas estocásticos (um para cada unidade geradora), que são resolvidos por meio da Programação Dinâmica Estocástica.

García-González *et al.* (2008) apresenta o problema de oferta de energia para um dia à frente. O sistema é composto por usinas eólicas e hidrelétricas com possibilidade de bombeamento. A função objetivo consiste na maximização do lucro da operação no mercado (venda e compra de energia) e na penalização dos desvios da operação em relação à energia comprometida na venda. O preço da energia e a geração pelas usinas eólicas são modelados como variáveis aleatórias. O foco desse artigo é a operação conjunta eólica-hidrelétrica. O problema de programação inteira-mista linear resultante é resolvido pelo CPLEX.

O problema tratado em De Laturantaye *et al.* (2009) consiste em planejar a operação de uma cascata inteira visando maximizar os lucros com a venda de energia elétrica. O preço é tratado como uma variável

aleatória, enquanto as vazões afluentes são consideradas determinísticas. O problema resultante é resolvido pelo CPLEX na forma de um problema de Programação Linear (PL) único.

O problema apresentado em Gröwe-Kuska *et al.* (2003) consiste na programação da operação em conjunto com a comercialização de energia em um contexto onde a demanda e o preço da energia elétrica são modeladas como variáveis aleatórias. Neste problema, o objetivo consiste em maximizar o lucro da comercialização da energia.

Matevosyan *et al.* (2006) lida com o problema da operação coordenada de duas usinas, uma hidrelétrica e outra eólica. Nesse artigo, é suposto que uma única linha de transmissão com capacidade limitada é compartilhada entre as duas usinas. O problema consiste em maximizar o lucro com a venda de energia (o preço da energia proveniente das usinas hidrelétricas é diferente das eólicas) observando diversos cenários para a geração eólica.

A complementaridade sazonal das fontes hidrelétrica e biomassa (bagaço de cana) é explorada em Street *et al.* (2009). Este artigo trata do problema da maximização do lucro de uma empresa de comercialização em um esquema *Value-at-Risk*, determinando a composição da carteira de contratos para as usinas hidrelétricas e biomassa. O problema é de pequeno porte, sendo resolvido na forma de um problema de Programação Linear único.

Exemplos de aplicações visando determinar o equilíbrio de mercado podem ser encontradas em Centeno *et al.* (2007), Yu *et al.* (2004) e Tesser *et al.* (2009). O equilíbrio de mercado consiste na situação em que qualquer ação isolada de um agente do mercado resulta em uma redução de seu lucro. As variáveis modeladas como aleatórias em cada artigo são: a demanda e as vazões afluentes em Yu *et al.* (2004) e Centeno *et al.* (2007) e as vazões afluentes e o preço da energia em Tesser *et al.* (2009).

2.7. CONCLUSÕES

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos consiste em determinar a estratégia de operação do sistema que minimize o custo de produção para um determinado horizonte. No contexto deste trabalho, essa minimização é relativa aos custos de produção das usinas termelétricas e de déficit. Assim, o planejamento da operação resulta essencialmente em um problema de otimização.

O problema requer a modelagem das usinas hidrelétricas e termelétricas, que é complexo. Ao mesmo tempo, é necessário modelar as incertezas das afluições. A solução desse problema é realizada por meio de uma cadeia de problemas. A etapa em foco deste trabalho corresponde ao problema da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo. O problema resultante tem horizonte de dois meses a um ano.

A presença de incertezas relativas às vazões afluentes exige que essas sejam modeladas como variáveis aleatórias. Como resultado dessa modelagem, obtém-se um problema de otimização sob condições de incerteza, problema este, tratado pela Programação Estocástica.

Uma revisão bibliográfica sobre problemas de sistemas de energia elétrica sob condições de incerteza onde a Programação Estocástica é o paradigma utilizado para o tratamento e solução desses problemas é apresentada. Não foi encontrada nenhuma referência às principais propostas deste trabalho (tanto o tratamento do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo como um problema de Programação Estocástica quanto a sua solução pelo *Progressive Hedging*), confirmando tais propostas como contribuições como inovadoras.

Na continuidade deste trabalho, a Programação Estocástica é apresentada no Capítulo 3. A modelagem do problema de Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos de Curto Prazo no contexto da Programação Estocástica é apresentada no Capítulo 4.

3. PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

3.1. INTRODUÇÃO

A Programação Estocástica é o paradigma utilizado para tratar problemas de otimização contendo variáveis aleatórias. Nesse caso, o único conhecimento que se tem da variável são os valores que ela pode assumir e a sua distribuição de probabilidades². No caso do problema tratado neste trabalho, as vazões afluentes são as variáveis modeladas como aleatórias. Nesse contexto, este capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos da Programação Estocástica.

O modelagem das incertezas na forma de um grafo conhecido como árvore de cenários é apresentada na Seção 3.2.

O problema geral de otimização é modelado matematicamente na Seção 0, na qual são apresentados dois modelos matemáticos equivalentes.

Os métodos mais comuns utilizados na solução de problemas de Programação Estocástica, juntamente com uma revisão bibliográfica, são apresentados Seção 3.4. Na Seção 3.5 são apresentadas duas simulações preliminares, onde diversos métodos de solução, incluindo o *Progressive Hedging* (método estudado nesta Tese) e a Decomposição Aninhada (método atualmente em uso no País), são comparados. O método *Progressive Hedging* será detalhado nos capítulos 5 e 6.

3.2. MODELAGEM DAS INCERTEZAS

Antes de apresentar o modelo matemático que representa um problema de Programação Estocástica (Birge *et al.*, 1997) e os métodos para a sua

² Neste trabalho não serão estudados os modelos para descrever o comportamento estocástico de um determinado fenômeno. Como o enfoque deste trabalho é o modelo de otimização e a solução do problema resultante, o modelo para a variável aleatória será considerado como um dado de entrada.

solução, faz-se importante mostrar como as incertezas são tratadas neste paradigma.

A título de ilustração, considere que no presente ($t=1$) tem-se que as variáveis do problema são totalmente conhecidas, porém para o segundo estágio ($t=2$) não se tem certeza quanto ao valor que será assumido por uma determinada variável (aleatória). Considere também que, embora não se conheça o valor que será assumido pela variável em $t=2$, seu espaço amostral Ω é conhecido e, portanto, as suas possíveis realizações ω_n são conhecidas. O grafo apresentado na Figura 3.1 representa essa situação: um único nó para o primeiro estágio e N nós para o segundo, cada um representando uma determinada realização ω_n . Associada a cada realização ω_n existe uma probabilidade p_{ω_n} .

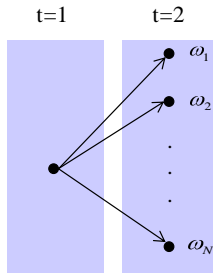


Figura 3.1 – Árvores de Cenários Simples.

Considere agora uma outra situação, onde o horizonte é estendido para três estágios e que a variável aleatória pode assumir somente dois valores. Adicionalmente, considere que, associada a cada realização para a variável aleatória existe uma decisão a ser tomada. A árvore de cenários que representa essa situação é apresentada na Figura 3.2.

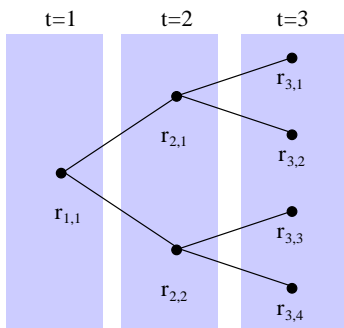


Figura 3.2 – Árvore de Cenários com Três Estágios e Quantidade de Realizações Limitadas a Duas.

Observe que na Figura 3.2, comparativamente à Figura 3.1, os nós $r_{t,q}$ são explicitados enquanto as realizações ω_n foram omitidas. Isto se faz interessante uma vez que cada nó representa não somente uma realização para a variável aleatória, mas também uma decisão correspondente a ser tomada. Assim, a probabilidade p_{ω_n} de tal realização ocorrer é também a probabilidade da respectiva decisão ser aplicada. Este trabalho segue com a seguinte notação para nó:

$$r_{t,q}, \quad \text{sendo } q = 1, \dots, Q_t \quad (3.1)$$

onde:

- t : estágio;
- q : índice do nó;
- Q_t : quantidade de nós do estágio t .

É importante observar que todos os nós de um determinado estágio t exaurem as possibilidades de seu espaço amostral Ω_t . Assim, temos que:

$$\sum_{q=1}^{Q_t} p_{r_{t,q}} = 1 \quad (3.2)$$

Também, pela Figura 3.2 é possível observar que os nós estão conectados a outros nós de outros estágios. O nó do estágio anterior é conhecido como ancestral e denotado por $A(r_{t,q})$, enquanto o nó do estágio seguinte é conhecido por descendente e denotado por $D(r_{t,q})$. A título de exemplo, temos os seguintes nós ancestral e descendentes para o nó $r_{2,1}$ da Figura 3.2:

$$\begin{aligned} A(r_{2,1}) &= \{r_{1,1}\} \\ D(r_{2,1}) &= \{r_{3,1}, r_{3,2}\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ainda pela Figura 3.2, é possível observar que existem caminhos completos desde o primeiro estágio até o último. Esses caminhos são conhecidos por cenários e representam uma possível trajetória de realizações. A Figura 3.3 explicita os quatro cenários (s_1, s_2, s_3 e s_4) correspondentes à árvore da Figura 3.2.

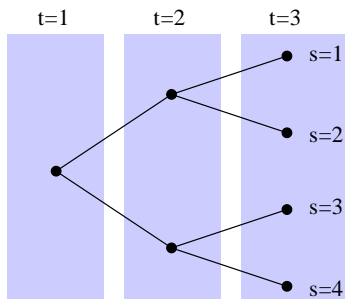


Figura 3.3 – Cenários de uma Árvore de Cenários.

Observe que os diversos cenários podem compartilhar os mesmos nós até um determinado estágio. Por exemplo, os cenários s_1 e s_2 da Figura 3.3 compartilham os nós dos estágios $t=1$ e $t=2$. Isso significa que tais cenários estão compartilhando tanto as realizações, quanto as decisões correspondentes a esses nós.

Da mesma forma que existe uma probabilidade associada à cada nó, também existe uma probabilidade p_s associada à cada cenário s . Considerando que todos os cenários da árvore exaurem seu espaço amostral Ω , tem-se:

$$\sum_{s=1}^S p_s = 1 \quad (3.4)$$

3.3. *MODELOS MATEMÁTICOS*

Este capítulo apresenta dois modelos matemáticos para o problema de Programação Estocástica. Esses modelos são conhecidos por modelo por nós (ou não-antecipatividade representada implicitamente) e modelo por

cenários (ou não-antecipatividade representada explicitamente). Embora sejam distintos, esses modelos são matematicamente equivalentes.

Inicialmente, é importante apresentar como a variável aleatória é tratada no problema de otimização. Para tanto, considere uma determinada realização ω no estágio t . O problema de otimização referente a esse par realização e estágio é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_{t,\omega}(x_{t,\omega}) \\ \text{s.a.:} \quad & G_{t,\omega}x_{t-1,\omega} + H_{t,\omega}x_{t,\omega} = b_{t,\omega} \\ & x_{t,\omega} \in X_{t,\omega} \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde: $f_{t,\omega}$: é a função objetivo;

$x_{t,\omega}$: são as variáveis de decisão;

$G_{t,\omega}$: é a matriz de recursão³;

$H_{t,\omega}$: é a matriz de tecnologia⁴;

$b_{t,\omega}$: é vetor de recursos das restrições de acoplamento temporal;

$X_{t,\omega}$: é a região viável para $x_{t,\omega}$.

³ Essa matriz também é conhecida como matriz de transição, pois reflete o acoplamento entre dois estágios.

⁴ Corresponde à função de transferência, isto é, que realiza a transformação dos recursos.

As duas matrizes $G_{t,\omega}$ e $H_{t,\omega}$ fazem parte da restrição que modela o acoplamento temporal entre os estágios t e $t-1$.

A rigor, todas as variáveis do problema podem ser aleatórias, como $x_{t,\omega}$, $f_{t,\omega}$, $G_{t,\omega}$, $H_{t,\omega}$, $b_{t,\omega}$ e $X_{t,\omega}$ em (3.5). Entretanto, conforme será apresentado no capítulo seguinte, no problema tratado neste trabalho, somente $b_{t,\omega}$ será modelado como variável aleatória. Assim, por simplificação, f_t , G_t , H_t e X_t serão considerados determinísticos, resultando no problema:

$$\begin{aligned} \min f_t(x_{t,\omega}) \\ \text{s.a.: } G_t x_{t-1,\omega} + H_t x_{t,\omega} &= b_{t,\omega} \\ x_{t,\omega} &\in X_{t,\omega} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observe que (3.6) refere-se ao problema para uma realização. Uma vez que esse problema refere-se também a um nó específico da árvore de cenários, podemos reescrevê-lo como o problema referente a um nó como em (3.7):

$$\begin{aligned} \min f_t(x_{r_t,q}) \\ \text{s.a.: } G_t x_{A(r_t,q)} + H_t x_{r_t,q} &= b_{r_t,q} \\ x_{r_t,q} &\in X_{r_t,q} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Além do modelo que representa um determinado nó, conforme apresentado em (3.7), também é possível modelar o problema referente a

um determinado cenário s modelando simultaneamente todos os nós que compõem esse cenário, de $t=1...T$, conforme apresentado em (3.8):

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=1}^T f_t(x_{t,s}) \\ \text{s.a.: } G_t x_{t-1,s} + H_t x_{t,s} = b_{t,s} \\ x_{t,s} \in X_{t,s} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Os modelos (3.7) e (3.8) modelam um nó e um cenário, respectivamente, ou seja, tais modelos representam somente parte do problema de Programação Estocástica. Entretanto, tais modelos podem ser visualizados como sendo blocos elementares para a modelagem do problema completo.

3.3.1. Modelagem do problema por nós ou Equivalente Determinístico

A construção do modelo por nós pode ser entendida como a modelagem de todos os nós (3.7) do problema simultaneamente. O acoplamento entre os nós é realizado pelas restrições de acoplamento temporal, fazendo uso do conceito de nó ancestral. Como resultado, temos o seguinte problema:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{q=1}^{Q_t} p_{r_{t,q}} f_t(x_{r_{t,q}})$$

s.a.:

Restrições de cada nó:

$$x_{r_{t,q}} \in X_{r_{t,q}} \quad (3.9)$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$q = 1, \dots, Q_t$$

Restrições de acoplamento temporal:

$$G_t x_{A(r_{t,q})} + H_t x_{r_{t,q}} = b_{r_{t,q}}$$

Essa representação do problema também é conhecida na literatura com Equivalente Determinístico (Birge *et al.*, 1997). A modelagem por nós é também a forma mais sucinta de representar um problema de Programação Estocástica (menor quantidade de variáveis e de restrições).

3.3.2. Modelagem do problema por cenários

Construir um modelo por cenários significa representar todos os cenários (3.8) simultaneamente. O acoplamento entre os diversos cenários é realizado por restrições conhecidas como restrições de não-antecipatividade.

O conceito da não-antecipatividade vem do fato (já comentado e exemplificado a partir da Figura 3.3) de que diversos cenários podem compartilhar o mesmo caminho até um determinado nó e que, portanto, tais cenários também compartilham as mesmas realizações e decisões até o estágio ao qual esse nó pertence.

Para definir a não-antecipatividade, considere o trecho de uma árvore de cenários, do estágio 1 ao estágio $t+1$, apresentado na Figura 3.4. Observe que os cenários s_ω e s_ξ compartilham os mesmos nós até o estágio t . Assim esses cenários têm o passado em comum até esse estágio. Por outro lado, do futuro ($t+1$ em diante) somente as diferentes trajetórias que as variáveis aleatórias podem seguir são conhecidas, de modo que não é possível antecipar qual dessas trajetórias irá se realizar. Dada à trajetória comum e à impossibilidade de antecipar o futuro, a decisão resultante da otimização até o estágio t deve ser igual para todos os cenários que passam pelo mesmo nó em t (no caso do exemplo, s_ω e s_ξ). Em outras palavras, a não-antecipatividade pode ser definida para cada estágio t estabelecendo que as decisões tomadas para x_t devem ser iguais para todos os cenários s que têm o mesmo passado e presente (Rosa *et al.*, 1994). Matematicamente, a não-antecipatividade pode ser definida como em (3.10).

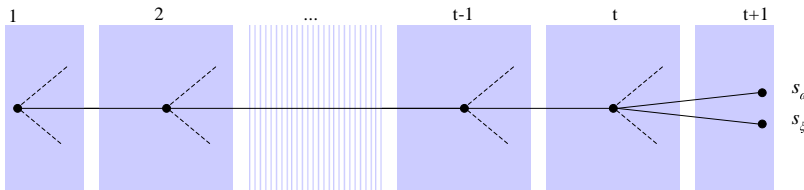


Figura 3.4 – Não-Antecipatividade

$$x_{t,s_\omega} = x_{t,s_\xi} \quad \text{se} \quad s_{\tau,\omega} = s_{\tau,\xi} \quad \text{para} \quad \tau = 1, \dots, t \quad \text{e} \quad \omega, \xi \in \Omega \quad (3.10)$$

Definida a não-antecipatividade, o problema geral de Programação Estocástica modelado por cenários resulta em (3.11).

$$\min \sum_{s=1}^S p_s \sum_{t=1}^T f_s(x_{t,s})$$

s.a.:

Restrições de cada cenário:

$$G_t x_{t,s} + H_t x_{t,s} = b_{t,s}$$

$$x_{t,s} \in X_{t,s} \tag{3.11}$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$s = 1, \dots, S$$

Restrições de não-antecipatividade:

$$x_{t,s_0} = x_{t,s_\xi} \text{ se } s_{\tau,\omega} = s_{\tau,\xi} \text{ para } \tau=1,\dots,t \text{ e } \omega, \xi \in \Omega$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$s = 1, \dots, S$$

O modelo (3.11) pode ser interpretado como tendo duas partes: a representação individual de cada cenário e o acoplamento das representações dos cenários pelas restrições de não-antecipatividade. Por esse motivo, o modelo por cenários também é conhecido como modelo com a não-antecipatividade modelada explicitamente.

A não-antecipatividade em (3.11) está modelada de forma exaustiva, ou seja, existe uma equação para cada par de cenários que passam por um determinado nó. Entretanto, a não-antecipatividade pode ser modelada de diversas outras formas. No Capítulo 5, a forma como essa representação é realizada no *Progressive Hedging* é apresentada.

3.4. MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

Existem diversos métodos para resolver problemas de Programação Estocástica, cada qual com vantagens e desvantagens particulares. Esses métodos são, geralmente, baseados em um mesmo conceito: a decomposição do problema matemático original em diversos problemas menores, de solução mais fácil e que são resolvidos iterativamente.

No Brasil o método utilizado para a solução do problema do planejamento da operação de curto prazo em uso é a Decomposição Aninhada (Birge *et al.*, 1997; CEPEL, 1999a, 1999b).

Entretanto, outros métodos para a solução do problema podem ser encontrados na literatura, dentre os quais destacam-se a Decomposição Regularizada⁵, a Relaxação Lagrangeana, o *Progressive Hedging* e a Aproximação Quadrática Diagonal⁶. Tais métodos serão apresentados na próxima seção. Dentre esses métodos, o *Progressive Hedging* é o proposto neste trabalho (Capítulos 5 e 6).

3.4.1. Decomposição Aninhada e Decomposição Regularizada

A Decomposição Aninhada (Ho *et al.*, 1974; Birge *et al.*, 1997; Lau, 1999; Pereira *et al.*, 1985⁷) é uma extensão do método *L-Shaped*⁸ (van

⁵ Do inglês *Regularized Decomposition*.

⁶ Do inglês *Diagonal Quadratic Approximation*.

⁷ Em Pereira *et al.*, 1985, a Decomposição Aninhada é apresentada como a Programação Dinâmica Dual Estocástica, embora esse termo possa se referir também a uma outra metodologia específica, que combina o *L-Shaped* para problemas multi estágio (assim como a Decomposição Aninhada) e uma estratégia de amostragem de cenários.

Slyke *et al.*, 1969, Birge *et al.*, 1997, Lau, 1999) para problemas multi-estágio. O método *L-Shaped* trata problemas de dois estágios e atua “quebrando” as restrições de acoplamento temporal. Como resultados tem-se um problema mestre para o primeiro estágio e subproblemas para o segundo estágio. A estratégia da Decomposição Aninhada é aplicar o método *L-Shaped* de forma recursiva a um problema com mais de dois estágios. Assim, a Decomposição Aninhada resulta em uma decomposição por nós, onde existe um problema de programação linear para cada nó da árvore de cenários.

Durante o processo de solução, existe uma troca de informações entre os subproblemas e o problema mestre. Essa troca de informações é realizada pela introdução de restrições de desigualdade (planos cortantes) no problema mestre, a cada iteração. Essas restrições podem ser de dois tipos: restrições de otimalidade (também conhecidos como cortes de Benders ou cortes de otimalidade) ou restrições de viabilidade. As restrições de otimalidade constituem uma função que representa o impacto futuro⁹ das possíveis decisões do problema mestre, enquanto as restrições de viabilidade impedem que sejam tomadas decisões para o problema mestre que resultam em soluções inviáveis para um ou mais de seus subproblemas.

O método da Decomposição Aninhada é o mais encontrado na literatura para a solução dos diversos problemas relacionados à otimização de recursos hídricos e planejamento de sistemas hidrotérmicos (Archibald *et al.*, 1999; CEPEL, 1999a, 199b; Pereira, *et al.*, 1985; Waltnkins Jr. *et al.*, 2000; Lamond *et al.*, 1996).

Constam no registros do NEOS (*Newtwork Enabled Optimization System* – NEOS, 2007) da OTC (*Optimization Technology Center* -

⁸ O *L-Shaped* é um método para solução de problemas de dois estágios. Nada impede, porém, que seja aplicado recursivamente a problemas de diversos estágios em um esquema como a Decomposição Aninhada.

⁹ Esse impacto futuro pode representar custo, lucro ou risco, dentre outros, dependendo do problema. No contexto do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, esse impacto corresponde ao custo futuro esperado decorrente da utilização dos reservatórios.

OTC, 2007) dois modelos computacionais desenvolvidos para resolver problemas lineares genéricos de Programação Estocástica baseados na Decomposição Aninhada: o MSLiP (Gassmann a, b] e o BNBS (*Bouncing Nested Benders Solver*). Outro modelo computacional que utiliza a Decomposição Aninhada é o DECIS (Infanger, 1997). Discussões sobre a implementação computacional da Decomposição Aninhada podem ser vistos em Gassmann (a e b); Laure *et al.* e Altenstedt (2003).

A Decomposição Regularizada (Ruszczynsky, 1986 e 1993; Birge *et al.*, 1997; Lau, 1999), introduzida por Ruszczynski, utiliza um esquema de solução semelhante ao da Decomposição Aninhada. A diferença em relação à Decomposição Aninhada está no termo de regularização quadrático adicionado à função objetivo dos problemas mestre. Não foram verificadas aplicações da decomposição regularizada a problemas em sistemas de energia elétrica.

3.4.2. Relaxação Lagrangeana

A Relaxação Lagrangeana decompõe o problema original em subproblemas menores pela dualização das restrições que acoplam tais subproblemas no problema original.

Além dos subproblemas, a aplicação da Relaxação Lagrangeana resulta também em um problema mestre, conhecido como problema dual (Lemaréchal). Dentre os diversos métodos utilizados para resolver o problema dual destacam-se os métodos Subgradiente, Planos Cortantes e Feixes (Lemaréchal; Bonnans *et al.*, 2006).

Verificam-se diversas aplicações da Relaxação Lagrangeana a problemas da programação diária da operação considerando a demanda de energia como a variável aleatória (Gröwe-Kuska *et al.*, 2000; Heitsch *et al.*, 2003 e 2005 ; Nowak *et al.*, 2000; Caroe *et al.*, 1998; Dentcheva, 1998). No caso de problemas não estocásticos de sistemas hidrotérmicos, a aplicação da Relaxação Lagrangeana costuma ter como objetivo a decomposição do problema original em subproblemas com características distintas, de modo a serem tratados por métodos especializados (Finardi *et al.*, 2005 e 2006; Diniz *et al.*, 2003 e 2004b).

A Relaxação Lagrangeana tem uma característica importante: não há garantia de que uma solução primal viável seja encontrada ao final do processo de solução. Assim, a fim de se obter uma solução implementável, pode ser necessário realizar um processo de recuperação da solução primal. Dentre os métodos que possibilitam realizar a recuperação do primal, têm-se os métodos baseados no Lagrangeano Aumentado.

3.4.3. Lagrangeano Aumentado, *Progressive Hedging* e Aproximação Quadrática Diagonal

O método do Lagrangeano Aumentado, além de relaxar as restrições pela sua dualização, conforme realizado pela Relaxação Lagrangeana, considera ainda um termo quadrático adicional na função objetivo. Esse termo quadrático assegura, sob determinadas condições (Bertsekas, 1999), a viabilidade primal ao final do processo de solução e possibilita que o problema dual seja resolvido por métodos simples, como o método do gradiente. Entretanto, devido ao termo quadrático da função objetivo, a decomposição do problema em subproblemas menores não é possível diretamente. Tanto o *Progressive Hedging* [Rockafellar *et al.*, 1991; Mulvey *et al.*, 1991] quanto a Aproximação Quadrática Diagonal [Mulvey *et al.*, 1995; Rosa *et al.*, 1995] utilizam artifícios matemáticos para realizar a decomposição.

Aplicações do Lagrangeano Aumentado para outros problemas de planejamento de sistemas de energia elétrica podem ser verificadas em Yan *et al.* (1994), Carpentier *et al.* (1996), Al-Agash *et al.* (1998) e Reis *et al.* (2005). O problema tratado por Carpentier *et al.* *et al.* (1996) corresponde à programação da operação, considerando a demanda horária de energia como variável aleatória. Reis (2005) aplica o *Progressive Hedging* ao problema de planejamento da expansão da transmissão, onde a oferta e a demanda de energia são tratadas como variáveis aleatórias. Não foi verificada nenhuma aplicação do Lagrangeano Aumentado ou do *Progressive Hedging* ao problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo com

as vazões afluentes modeladas como variáveis aleatórias, problema em estudo neste trabalho.

Experiências sobre o desenvolvimento e a aplicação do *Progressive Hedging* utilizando processamento paralelo podem ser vistas em Sommervell e da Silva *et al.* (1994).

3.5. AVALIAÇÕES PRELIMINARES DOS MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Esta seção visa apresentar resultados preliminares da implementação de alguns dos métodos de solução apresentados na seção anterior. Com os resultados desta seção identifica-se o *Progressive Hedging* com um método com potencial para a solução do problema em estudo neste trabalho.

3.5.1. Simulação preliminar 1

Esta seção objetiva avaliar, a partir de resultados numéricos, o desempenho da Decomposição Aninhada em suas versões considerando Corte Único e Cortes Múltiplos, o *Progressive Hedging* e a Aproximação Quadrática Diagonal.

O problema utilizado nessa simulação conta com duas usinas hidrelétricas e duas termelétricas, conforme apresentado na figura a seguir.

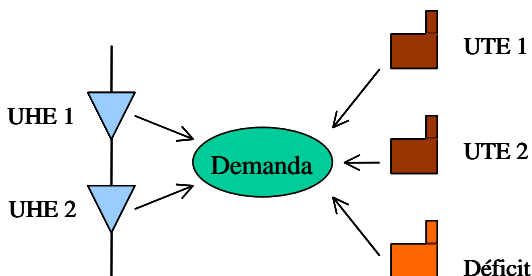


Figura 3.5 – Configuração Hidrelétrica para a Simulação Preliminar 1.

São considerados três estágios de tempo e três aberturas para cada nó, resultando em nove cenários. A estrutura da árvore de cenários resultante é apresentada na figura a seguir:

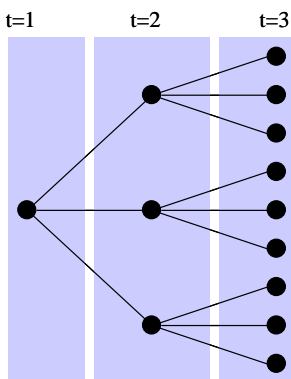


Figura 3.6 – Árvore de Cenários da Simulação Preliminar 1.

As simulações foram realizadas no Matlab, utilizando as rotinas de solução de programação linear (*linprog*) e programação quadrática (*quadprog*).

Os resultados obtidos encontram-se na tabela a seguir:

Tabela 3.1 – Resultados da Simulação Preliminar 1.

Método	# iterações	Tempo	Solução obtida
PL Único	-	0,7 segundos	9.500
Decomposição Aninhada (Corte Único)	7	6,7 segundos	9.500
Decomposição Aninhada (Cortes Múltiplos)	4	4,1 segundos	9.500
Lagrangeano Aumentado (<i>Progressive Hedging</i>)	11	44 segundos	9.374
Lagrangeano Aumentado (Aproximação Quadrática Diagonal)	15	47 segundos	8.654

Em relação à Decomposição Aninhada, observa-se que a versão com Cortes Múltiplos convergiu com menos iterações (devido à melhor representação das funções de custo futuro) e com menor tempo de execução do que a versão com Corte Único. Quando comparadas ao PL Único, ambas as versões tiveram maior tempo de execução. Observa-se que essa diferença de desempenho foi observada para um problema de pequeno porte. Com essas simulações, não se pode concluir sobre o comportamento para um sistema de grande porte.

Durante as simulações de ambos os métodos do Lagrangeano Aumentado, a rotina de programação quadrática apresentou problemas para resolver os subproblemas. Observa-se, porém, que os valores das soluções finais para esses métodos estão próximas da solução obtida pelo PL único. Quanto mais se reduziu a tolerância, mais o *quadprog*, função do Matlab utilizado para resolver os subproblemas quadráticos, apresentou problemas. Devido aos problemas encontrados com a

utilização do *quadprog*, a comparação dos resultados obtidos com esses métodos não é conclusiva.

3.5.2. Simulação preliminar 2

Esta seção tem como objetivo a comparação entre os dois métodos de solução baseados no Lagrangeano Aumentado: o *Progressive Hedging* e a Aproximação Quadrática Diagonal.

O sistema hidrotérmico consiste em duas usinas hidrelétricas em cascata (foram utilizados os dados de Itá e Machadinho), duas termelétricas e uma variável de déficit¹⁰. Todas as usinas atendem uma única demanda, de forma que não existem subsistemas distintos nem intercâmbios. Tal sistema é apresentado na figura a seguir:

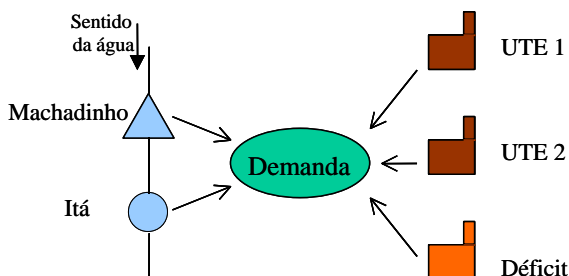


Figura 3.7 - Sistema Exemplo.

O horizonte de estudo é de quatro semanas. Como modelo estocástico para as vazões afluentes foi considerado que cada nó de um determinado estágio está associado a três realizações para o estágio seguinte. Dessa

¹⁰ Representada matematicamente como uma terceira usina termelétrica com uma capacidade infinita de geração e elevado custo de operação.

forma tem-se $3^{4-1} = 27$ cenários. A estrutura do modelo estocástico resultante é apresentada na Figura 3.8.

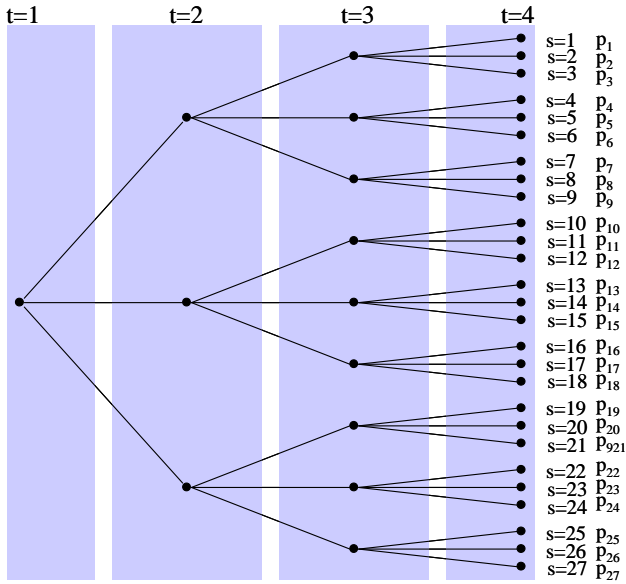


Figura 3.8 – Árvore de Cenários da Simulação Preliminar 2.

O modelo não considerou qualquer informação adicional proveniente de um modelo de mais longo prazo para o final do horizonte de estudo, quer seja uma meta para o reservatório de Machadinho ou uma função de custo futuro.

A função de produção de cada usina foi considerada por meio de uma função linear por partes, dependente das vazões turbinada e vertida e do nível de armazenamento do reservatório.

O problema foi modelado como um problema de programação linear, resultando em 297 variáveis e 324 restrições. Após a decomposição pelo Lagrangeano Aumentado são obtidos 27 subproblemas de programação quadrática, cada um com 44 variáveis e 48 restrições.

A linguagem de programação em C++ foi utilizada para o desenvolvimento do modelo computacional. Para resolver os subproblemas quadráticos foi utilizada a rotina PLCBAS (Casas et al.).

A configuração dos métodos é apresentada nas tabelas abaixo. As tolerâncias referem-se a quão próximo as variáveis e seus termos de separabilidade ou variável vizinha devem estar para que as restrições de não-antecipatividade sejam consideradas satisfeitas. Adicionalmente, os métodos dependem de parâmetros penalidade e, para a Aproximação Diagonal Quadrática, de um parâmetro de relaxação.

Tabela 3.2 – Configuração do *Progressive Hedging*.

Parâmetro de penalidade ρ	Tolerância da diferença entre x_s e \bar{x}_s
0,5	0,5

Tabela 3.3 – Configuração da Aproximação Quadrática Diagonal.

Parâmetro de penalidade ρ	Parâmetro de relaxação τ	Tolerância da diferença entre x_s e \tilde{x}_s	Tolerância da diferença entre x_s e x_{n_s}
0,1	0,5	0,5	0,5

Os parâmetros de penalidade foram determinados de forma experimental. Para alguns valores, não foi verificada convergência ou verificaram-se elevados tempos de execução e quantidades de iterações. A Aproximação Quadrática Diagonal se mostrou mais sensível a esse parâmetro que o *Progressive Hedging*.

A convergência dos métodos (quantidade de iterações e custo esperado de operação) pode ser verificada pela Tabela 3.4. A demanda foi considerada constante ao longo de todo o horizonte de estudo.

Tabela 3.4 – Dados da Convergência dos Métodos Estudados.

Demanda [MW]	Método	Quantidade de Iterações	Tempo de Execução [s]	Custo Esperado de Operação [\$]
1.500	<i>Progressive Hedging</i>	29	6	29.721,7
	Aproximação Quadrática Diagonal	322	62	28.316,3
1.800	<i>Progressive Hedging</i>	28	6	116.316
	Aproximação Quadrática Diagonal	124	26	115.761
2.200	<i>Progressive Hedging</i>	18	3	326.142
	Aproximação Quadrática Diagonal	127	23	325.882
2.800	<i>Progressive Hedging</i>	36	6	1.392.580
	Aproximação Quadrática Diagonal	71	12	1.392.560
3.500	<i>Progressive Hedging</i>	22	3	2.791.640
	Aproximação Quadrática Diagonal	29	5	2.791.650

Pelas tabelas acima, observar-se que para uma mesma demanda ambos métodos resultaram em custos esperados de operação equivalentes. Observa-se também que o *Progressive Hedging* necessitou de um menor

tempo de execução para convergir, especialmente para as demandas menores. Embora essa observação não inviabilize a utilização da Aproximação Quadrática Diagonal, sugere que o *Progressive Hedging* tem um melhor desempenho para o problema tratado.

3.6. CONCLUSÕES

Este capítulo destina-se a apresentar a Programação Estocástica, área da matemática dedicada a estudar problemas da mesma natureza do problema tratado neste trabalho. Assim, estão apresentados a estrutura em árvore de cenários para tratar as incertezas, os modelos matemáticos para problemas de Programação Estocástica e também métodos para sua solução.

Verifica-se na literatura alguns métodos para resolver problemas de Programação Estocástica, a saber: Decomposição Aninhada, Decomposição Regularizada, *Progressive Hedging* e Aproximação Quadrática Diagonal. Destes métodos, o mais encontrado na literatura para resolver problemas relacionados a sistemas de energia elétrica é a Decomposição Aninhada. Não foram encontradas aplicações do *Progressive Hedging*, método proposto neste trabalho, na solução do problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo.

Adicionalmente, neste capítulo foram apresentados resultados de simulações preliminares que possibilitaram identificar a potencialidade do método *Progressive Hedging* e que contribuíram para a decisão de se estudar esse método de maneira mais profunda.

Os próximos capítulos destinam-se a apresentar a modelagem do problema do Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos de Curto no contexto da Programação Estocástica (Capítulo 4). O *Progressive Hedging* é apresentado em detalhes no Capítulo 5. O Capítulo 6 destina-se a apresentar os resultados práticos da solução do problema resultante pela aplicação do método *Progressive Hedging*.

4. O PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS DE CURTO PRAZO NO CONTEXTO DA PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

4.1. INTRODUÇÃO

As características do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos são apresentadas no Capítulo 2. Tais características levam a um problema de grande porte e difícil solução. Assim, o problema de grande porte é dividido em etapas. O interesse deste trabalho está na etapa intermediária, conhecida como planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo. Nesse problema, as vazões afluentes são de difícil previsão para algumas semanas ou até mesmo dias à frente e, portanto, devem ser modeladas como variáveis aleatórias.

A presença de variáveis aleatórias no problema de otimização o leva a ser tratado pela Programação Estocástica, a área da matemática destinada a estudar, modelar e resolver problemas de otimização sob condições de incerteza.

Assim, o presente capítulo tem como objetivo apresentar o problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo no contexto da Programação Estocástica.

As características físicas do sistema deverão ser consideradas de acordo com a discretização no tempo e o horizonte do problema. Neste trabalho, o planejamento de curto prazo tem discretização semanal para os primeiros estágios e mensal para os demais. Desse modo, as rampas de tomada e redução de carga das termelétricas, assim como os tempos de viagem da água inferiores a uma semana, não são modeladas. Nesse sentido, as Seções 4.2 e 4.3 apresentam, de forma mais detalhada, as características que devem ser consideradas nos modelos matemáticos para o problema do curto prazo.

Na Seção 4.4 são apresentados os modelos matemáticos que representam o problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo no contexto da Programação Estocástica. A

aplicação desses modelos a um problema literal de pequeno porte é apresentada na Seção 4.5.

Na Seção 4.6, uma versão com valores numéricos do problema de Programação Estocástica da Seção 4.5 é resolvida. Na Seção 4.7 a abordagem via Programação Estocástica é comparada com duas outras abordagens, baseadas em simplificações da árvore de cenários: o problema do valor esperado e a análise de cenários independentes.

As considerações finais e comentários em relação a este capítulo são apresentados na Seção 0.

4.2. PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE CURTO PRAZO

No planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo, o horizonte de estudos é de até um ano e a discretização é semanal para os estágios iniciais e mensal para os estágios posteriores. As usinas são representadas em sua forma individualizada e as incertezas relativas às afluências são representadas por meio de uma árvore de cenários.

As principais características do sistema que devem ser consideradas no problema do planejamento de curto prazo são:

Custo de produção termelétrica: consiste nos custos variáveis de operação e manutenção.

Custo de déficit: representa o custo econômico-social no caso de déficit de energia.

Geração da usina hidrelétrica: resulta da função de produção das usinas hidrelétricas, sendo função da vazão turbinada e da queda líquida (Diniz *et al.* 2004a e 2008 e Xavier *et al.*, 2005). Uma modelagem linear por partes utilizada para representar essa função de produção é apresentada na Seção 4.3.

Restrição de atendimento à demanda: a soma da produção de cada usina de um subsistema e dos intercâmbios (importações e exportações) deve ser igual à demanda do subsistema.

Restrição de conservação da massa de água: esta restrição representa os acoplamentos temporal e espacial dos reservatórios. As incertezas do problema (vazões afluentes) encontram-se no vetor de recursos dessa restrição, conforme será visto na seção seguinte.

Outras restrições hidráulicas: vazão defluente mínima, enchimento de volume morto, volume de espera para amortecimento de cheias, estações de bombeamento, desvios nos rios, captação de água para irrigação, abastecimento de cidades e indústrias e manutenção da navegabilidade e da qualidade de água.

Patamares de carga: os patamares de carga têm como objetivo emular as variações de demanda de energia ao longo do dia. Cada patamar é definido por uma demanda e uma duração. Comumente são utilizados três patamares de carga (pesado, médio e leve).

Manutenção: a manutenção das usinas costuma ser considerada por meio de fatores de disponibilidade por estágio.

Cronogramas para expansão: devido ao fato de que o sistema é dinâmico, o modelo deve considerar a entrada em operação das novas usinas ou unidades geradoras.

Geração mínima para as usinas termelétricas: proveniente de contratos de consumo de combustível e de restrições tecnológicas.

Importação/exportação de energia: a importação e a exportação de energia são modelados como usinas termelétricas na fronteira do Sistema Interligado Nacional.

4.3. A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO DAS USINAS HIDRELÉTRICAS

Conforme apresentado no Capítulo 2, a função de produção das usinas hidrelétricas depende da vazão turbinada e da queda líquida (que por sua vez é função dos níveis de montante e de jusante e das perdas nos canais de adução). Adicionalmente, essa função de produção pode ser não linear, o que, nos contextos da Programação Linear e da Programação Quadrática, exige um processo de linearização.

Assim, nesse trabalho foi utilizado processo de linearização por meio de aproximações de Taylor de primeira ordem. Como resultado, tem-se L hiperplanos (4.1) tangentes à envoltória da função original representando uma função linear por partes convexa:

$$gh_{uhe,t} + \delta_{uhe}^i \cdot turb_{uhe,t} + \beta_{uhe}^i \cdot arm_{uhe,t} + \phi_{uhe}^i \cdot vert_{uhe,t} \leq \gamma_{uhe}^i \quad (4.1)$$

$i = 1, \dots, I_{uhe}$

Onde:

$gh_{uhe,t}$:	produção hidrelétrica pela usina uhe , durante o estágio t (MWméd);
$turb_{uhe,t}$:	vazão turbinada pela usina uhe , durante o estágio t (m ³ /s);
$arm_{uhe,t}$:	volume armazenado no reservatório da usina uhe , ao final do estágio (hm ³);
$vert_{uhe,t}$:	vazão vertida pela usina uhe , durante o estágio t (m ³ /s);
i :	índice da função linear utilizada para representar a função de produção;
I_{uhe} :	conjunto de funções lineares para representar a função de produção da usina hidrelétrica uhe ;

γ_{uhe} : coeficiente linear das funções lineares para
representar a função de produção da usina
hidrelétrica *uhe* .

A título de ilustração do processo de aproximação linear por partes de uma função de produção, observe a Figura 4.1. Nessa figura são apresentadas a função de produção original (por simplificação, a produção como função unicamente da vazão turbinada), três aproximações lineares e a função resultante.

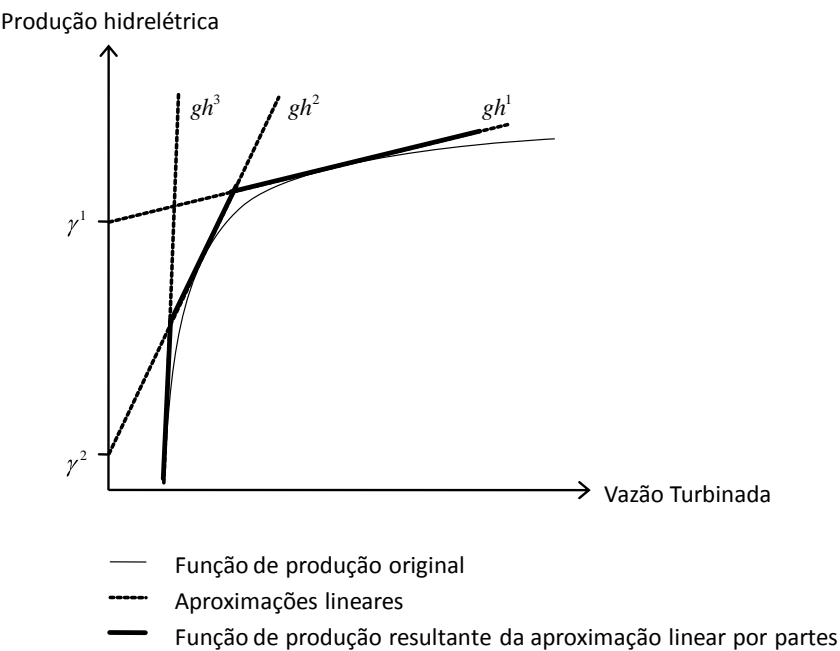


Figura 4.1 – Ilustração da Aproximação Linear por Partes de uma Função de Produção de uma Usina Hidrelétrica.

Mais detalhes sobre a representação da função de produção podem ser encontradas em Xavier *et al.* (2005) e Diniz *et al.* (2004a e 2008).

4.4. O MODELO MATEMÁTICO

Esta seção tem como objetivo apresentar o modelo matemático do problema em foco neste trabalho no contexto da Programação Estocástica. Por motivos didáticos, inicialmente será apresentada a parcela do problema referente a um único nó, que constitui o bloco elementar para a construção dos dois modelos apresentados em seguida: o modelo por nós e o modelo por cenários.

4.4.1. O problema referente a um nó

O modelo matemático para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo para um determinado nó $r_{i,q}$, equivalente a (3.6), é apresentado em (4.2). Tal modelo representa os custos de produção termelétrica, custos de déficit, restrições de atendimento à demanda e de conservação da massa d'água e a função de produção, que correspondem às características mais importantes para a etapa de curto prazo

$$\min \sum_{ute \in UTE} ct_{ute} \cdot gt_{ute, r_t, q} + \sum_{ss \in SS} cd \cdot def_{ss, r_t, q}$$

s.a.:

Atendimento à demanda do subsistema ss :

$$\sum_{ute \in UTE_{ss}} gt_{ute, r_t, q} + \sum_{uhe \in UHE_{ss}} gh_{uhe, r_t, q} + \sum_{ss_2 \in SS} int_{ss, ss_2, r_t, q} + \\ def_{ss, r_t, q} = Dem_{ss, t}$$

Conservação da massa d'água para a usina hidrelétrica uhe :

$$- \sum_{uhe_2 \in M_{uhe}} (arm_{uhe_2, r_t, q} + vert_{uhe_2, r_t, q}) + arm_{uhe, r_t, q} + turb_{uhe, r_t, q} + \\ vert_{uhe, r_t, q} = Afl_{uhe, r_t, q} + arm_{uhe, A(r_t, q)}$$

Função de produção da usina hidrelétrica uhe :

$$gh_{uhe, r_t, q} + \delta_{uhe}^i \cdot turb_{uhe, r_t, q} + \beta_{uhe}^i \cdot arm_{uhe, r_t, q} + \\ \varphi_{uhe}^i \cdot vert_{uhe, r_t, q} \leq \gamma_{uhe}^i \quad (4.2)$$

$i \in I_{uhe}$

Restrições de caixa:

$$0 \leq gt_{ute, r_t, q} \leq gt_{ute}^{\max}$$

$$0 \leq gh_{uhe, r_t, q} \leq gh_{uhe}^{\max}$$

$$arm_{uhe}^{\min} \leq arm_{uhe, r_t, q} \leq arm_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq vert_{uhe, r_t, q} \leq vert_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq turb_{uhe, r_t, q} \leq turb_{uhe}^{\max}$$

$$-int_{ss, ss_2}^{\max} \leq int_{ss, ss_2, r_t, q} \leq int_{ss, ss_2}^{\max}$$

$$0 \leq def_{ss, r_t, q} \leq Dem_{ss, t}$$

onde:

Variáveis de decisão:

gt :	produção termelétrica (MW _{méd});
def :	déficit de energia (MW _{méd});
gh :	produção hidrelétrica (MW _{méd});
$turb$:	vazão turbinada (m ³ /s);
arm :	volume armazenado (hm ³);
$vert$:	vazão vertida (m ³ /s);

Constantes:

ct :	custo de produção termelétrica (\$/MWh);
cd :	custo de déficit (\$/MWh);
int :	intercâmbio de energia;
Dem :	demanda de energia;
Afl :	vazão afluente (m ³ /s);

Índices e conjuntos:

ute :	índice de termelétricas;
UTE :	conjunto de usinas termelétricas;
ss :	índice de subsistemas;
SS :	conjunto de subsistemas;
uhe :	índice de hidrelétricas;
UHE :	conjunto de usinas hidrelétricas;
M_{uhe} :	conjunto de usinas à montante da usina uhe ;

$i :$	índice da função linear parcial para representar a função de produção;
$I_{uhe} :$	conjunto de funções lineares para representar a função de produção da usina hidrelétrica uhe .

Em (4.2), a restrição de conservação da massa d'água corresponde ao acoplamento temporal (relacionando o nó $r_{t,q}$ com o seu nó ancestral $A(r_{t,q})$, por meio da variável de armazenamento). Usando a notação do Capítulo 3, Seção 0, podemos identificar as parcelas referentes às restrições de acoplamento temporal, conforme (4.3). Ainda nessa restrição encontra-se a vazão afluenta ($Afl_{uhe,r_{t,q}}$), que corresponde à variável aleatória do problema.

$$\begin{aligned}
 Gx_{A(r_{t,q})} &= arm_{uhe,A(r_{t,q})} \\
 Hx_{r_{t,q}} &= arm_{uhe,r_{t,q}} + turb_{uhe,r_{t,q}} + vert_{uhe,r_{t,q}} + \\
 &\quad - \sum_{uhe_2 \in M_{uhe}} (arm_{uhe_2,r_{t,q}} + vert_{uhe_2,r_{t,q}}) \\
 b_{r_{t,q}} &= Afl_{uhe,r_{t,q}}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Esse modelo para um nó será utilizado nas seções seguintes como bloco elementar para a construção dos modelos por nós e por cenários.

4.4.2. Modelo por nós ou Equivalente Determinístico

Conforme apresentado no Capítulo 3, o modelo por nós consiste na representação simultânea de todos os nós do problema acoplados pelas equações de acoplamento temporal. No caso do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos esse acoplamento temporal é representado pela equação da conservação da massa d'água. Assim, temos o seguinte modelo por nós para o problema:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{q=1}^{Q_t} \sum_{ute \in UTE} p_{t,q} \left(ct_{ute} \cdot gt_{ute,r_{t,q}} + \sum_{ss \in SS} cd \cdot def_{ss,r_{t,q}} \right)$$

s.a.:

Atendimento à demanda do subsistema ss :

$$\sum_{ute \in UTE_{ss}} gt_{ute,r_{t,q}} + \sum_{uhe \in UHE_{ss}} gh_{uhe,r_{t,q}} + \sum_{ss_2 \in SS} int_{ss,ss_2,r_{t,q}} + def_{ss,r_{t,q}} = Dem_{ss,r_{t,q}}$$

Conservação da massa d'água para a usina hidrelétrica uhe : (4.4)

$$- \sum_{uhe_2 \in M_{uhe}} (arm_{uhe_2,r_{t,q}} + vert_{uhe_2,r_{t,q}}) + arm_{uhe,r_{t,q}} + turb_{uhe,r_{t,q}} + vert_{uhe,r_{t,q}} = Afl_{uhe,r_{t,q}} + arm_{uhe,A(r_{t,q})}$$

Função de produção da usina hidrelétrica uhe :

$$gh_{uhe,r_{t,q}} + \delta_{uhe}^i \cdot turb_{uhe,r_{t,q}} + \beta_{uhe}^i \cdot arm_{uhe,r_{t,q}} + \phi_{uhe}^i \cdot vert_{uhe,r_{t,q}} \leq \gamma_{uhe}^i$$

$$i \in I_{uhe}$$

Restrições de caixa:

$$0 \leq gt_{ute,r_t,q} \leq gt_{ute}^{\max}$$

$$0 \leq gh_{uhe,r_t,q} \leq gh_{uhe}^{\max}$$

$$arm_{uhe}^{\min} \leq arm_{uhe,r_t,q} \leq arm_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq vert_{uhe,r_t,q} \leq vert_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq turb_{uhe,r_t,q} \leq turb_{uhe}^{\max}$$

$$-int_{ss,ss_2}^{\max} \leq int_{ss,ss_2,r_t,q} \leq int_{ss,ss_2}^{\max}$$

$$0 \leq def_{ss,r_t,q} \leq Dem_{ss,r_t,q}$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$q = 1, \dots, Q_t$$

4.4.3. Modelo por cenários

Conforme apresentado anteriormente, o modelo por cenários é obtido a partir das representações individuais para cada cenário. Por sua vez, o modelo para cada cenário s pode ser obtido a partir da representação de cada nó por onde o cenário s passa:

$$\min \sum_{t=1}^T \sum_{ute \in UTE} ct_{ute} \cdot gt_{ute,t,s} + \sum_{ss \in SS} cd \cdot def_{ss,t,s}$$

s.a.:

Atendimento à demanda do subsistema ss :

$$\sum_{ute \in UTE_{ss}} gt_{ute,t,s} + \sum_{uhe \in UHE_{ss}} gh_{uhe,t,s} + \sum_{ss_2 \in SS} int_{ss,ss_2,t,s} + def_{ss,t,s} = Dem_{ss,t,s}$$

Conservação da massa d'água para a usina hidrelétrica uhe :

$$- \sum_{uhe_2 \in M_{uhe}} (arm_{uhe_2,t,s} + vert_{uhe_2,t,s}) + arm_{uhe,t,s} + turb_{uhe,t,s} + vert_{uhe,t,s} = Afl_{uhe,t,s} + arm_{uhe,t-1,s}$$

Função de produção da usina hidrelétrica uhe :

$$gh_{uhe,t,s} + \delta_{uhe}^i \cdot turb_{uhe,t,s} + \beta_{uhe}^i \cdot arm_{uhe,t,s} + \varphi_{uhe}^i \cdot vert_{uhe,t,s} \leq \gamma_{uhe}^i \quad (4.5)$$

$$i \in I_{uhe}$$

Restrições de caixa:

$$0 \leq gt_{ute,t,s} \leq gt_{ute}^{\max}$$

$$0 \leq gh_{uhe,t,s} \leq gh_{uhe}^{\max}$$

$$arm_{uhe}^{\min} \leq arm_{uhe,t,s} \leq arm_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq vert_{uhe,t,s} \leq vert_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq turb_{uhe,t,s} \leq turb_{uhe}^{\max}$$

$$-int_{ss,ss_2}^{\max} \leq int_{ss,ss_2,t,s} \leq int_{ss,ss_2}^{\max}$$

$$0 \leq def_{ss,t,s} \leq Dem_{ss,t}$$

$$t = 1, \dots, T$$

Considerando todos os cenários modelados como em (4.5) e acoplados pelas restrições de não-antecipatividade como em (3.10) podemos escrever o modelo por cenários:

$$\min \sum_{s=1}^S p_s \left(\sum_{t=1}^T \sum_{ute \in UTE} ct_{ute} \cdot gt_{ute,t,s} + \sum_{ss \in SS} cd \cdot def_{ss,t,s} \right)$$

s.a.:

Atendimento à demanda do subsistema ss :

$$\begin{aligned} \sum_{ute \in UTE_{ss}} gt_{ute,t,s} + \sum_{uhe \in UHE_{ss}} gh_{uhe,t,s} + \sum_{ss_2 \in SS} int_{ss,ss_2,t,s} \\ + def_{ss,t,s} = Dem_{ss,t,s} \end{aligned}$$

Conservação da massa d'água para a usina hidrelétrica uhe :

(4.6)

$$\begin{aligned} - \sum_{uhe_2 \in M_{uhe}} (arm_{uhe_2,t,s} + vert_{uhe_2,t,s}) + arm_{uhe,t,s} + turb_{uhe,t,s} \\ + vert_{uhe,t,s} = Afl_{uhe,t,s} + arm_{uhe,t-1,s} \end{aligned}$$

Função de produção da usina hidrelétrica uhe :

$$\begin{aligned} gh_{uhe,t,s} + \delta_{uhe}^i \cdot turb_{uhe,t,s} + \beta_{uhe}^i \cdot arm_{uhe,t,s} \\ + \phi_{uhe}^i \cdot vert_{uhe,t,s} \leq \gamma_{uhe}^i \end{aligned}$$

$$i \in I_{uhe}$$

Restrições de não-antecipatividade:

$$\left. \begin{aligned} gt_{ute,t,s_0} &= gt_{ute,t,s_\xi} \\ gh_{ute,t,s_0} &= gh_{ute,t,s_\xi} \\ arm_{ute,t,s_0} &= arm_{ute,t,s_\xi} \\ vert_{ute,t,s_0} &= vert_{ute,t,s_\xi} \\ turb_{ute,t,s_0} &= turb_{ute,t,s_\xi} \\ int_{ute,t,s_0} &= int_{ute,t,s_\xi} \\ def_{ute,t,s_0} &= def_{ute,t,s_\xi} \end{aligned} \right\}, \text{ se } s_{\tau,\omega} = s_{\tau,\xi} \text{ para } \tau = 1, \dots, t \text{ e } \omega, \xi \in \Omega$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$s = 1, \dots, S$$

Restrições de caixa:

$$0 \leq gt_{ute,t,s} \leq gt_{ute}^{\max}$$

$$0 \leq gh_{uhe,t,s} \leq gh_{uhe}^{\max}$$

$$arm_{uhe}^{\min} \leq arm_{uhe,t,s} \leq arm_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq vert_{uhe,t,s} \leq vert_{uhe}^{\max}$$

$$0 \leq turb_{uhe,t,s} \leq turb_{uhe}^{\max}$$

$$-int_{ss,ss_2}^{\max} \leq int_{ss,ss_2,t,s} \leq int_{ss,ss_2}^{\max}$$

$$0 \leq def_{ss,t,s} \leq Dem_{ss,t}$$

4.5. EXEMPLO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

4.5.1. Problema literal de pequeno porte

Com o intuito de exemplificar a aplicação dos modelos matemáticos apresentados anteriormente (modelos por nós e por cenários), foi criado um problema literal de pequeno porte. Este mesmo problema será utilizado para estudar a solução de problemas de Programação Estocástica na Seção 4.6 e a aplicação do *Progressive Hedging* no Capítulo 5.

O sistema é constituído por duas usinas hidrelétricas e duas termelétricas, conforme ilustrado na Figura 4.2. Uma variável para déficit de energia também é representada matematicamente como uma termelétrica de custo elevado.

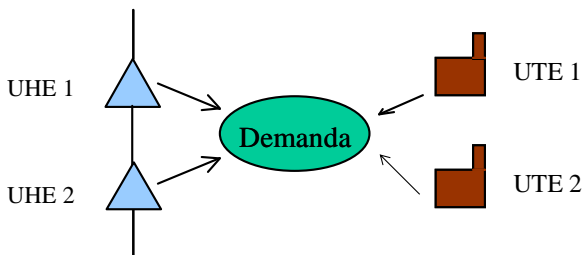


Figura 4.2 - Configuração Hidrotérmica do Problema Literal de Pequeno Porte.

O horizonte é formado por dois estágios de tempo. A árvore de cenários é constituída por três cenários com probabilidades p_s , conforme representado na Figura 4.3.

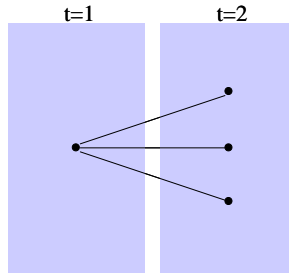


Figura 4.3 – Árvore de Cenários do Problema Literal de Pequeno Porte.

Nesse exemplo, a função de produção da usina hidrelétrica é representada de forma simplificada como uma função linear da vazão turbinada e do volume armazenado ao final do estágio, conforme (4.7). Essa representação consiste em uma simplificação da função linear por partes apresentada em (4.1).

$$gh_{uhe,t} = \delta_{uhe} \cdot turb_{uhe,t} + \beta_{uhe} \cdot arm_{uhe,t} \quad (4.7)$$

onde:

- δ_{uhe} : coeficiente associado ao volume turbinado, em MWmês/hm³,
- β_{uhe} : coeficiente associado ao volume armazenado ao final do estágio, em MWmês/hm³.

4.5.2. Exemplo do modelo por nós

A aplicação modelo matemático (3.9) ao problema exemplo resulta em (4.8):

$$\min ct_1 \cdot gt_{1,r_{1,1}} + ct_2 \cdot gt_{2,r_{1,1}} + cd \cdot def_{r_{1,1}} +$$

$$\sum_{q=1}^3 p_{r_{2,q}} (ct_1 \cdot gt_{1,r_{2,q}} + ct_2 \cdot gt_{2,r_{2,1}} + cd \cdot def_{r_{2,q}})$$

s.a.:

Restrições do nó do estágio 1:

$$\delta_1 \cdot turb_{1,r_{1,1}} + \beta_1 \cdot arm_{1,r_{1,1}} + \delta_2 \cdot turb_{2,r_{1,1}} + \beta_2 \cdot arm_{2,r_{1,1}} +$$

$$gt_{1,r_{1,1}} + gt_{2,r_{1,1}} + def_{r_{1,1}} = Dem_1$$

Restrições do nó 1 do estágio 2:

$$\delta_1 \cdot turb_{1,r_{2,1}} + \beta_1 \cdot arm_{1,r_{2,1}} + \delta_2 \cdot turb_{2,r_{2,1}} + \beta_2 \cdot arm_{2,r_{2,1}}$$

$$+ gt_{r_{2,1}} + def_{r_{2,1}} = Dem_2$$

(4.8)

Restrições do nó 2 do estágio 2:

$$\delta_1 \cdot turb_{1,r_{2,2}} + \beta_1 \cdot arm_{1,r_{2,2}} + \delta_2 \cdot turb_{2,r_{2,2}} + \beta_2 \cdot arm_{2,r_{2,2}}$$

$$+ gt_{r_{2,2}} + def_{r_{2,2}} = Dem_2$$

Restrições do nó 3 do estágio 2:

$$\delta_1 \cdot turb_{1,r_{2,3}} + \beta_1 \cdot arm_{1,r_{2,3}} + \delta_2 \cdot turb_{2,r_{2,3}} + \beta_2 \cdot arm_{2,r_{2,3}}$$

$$+ gt_{r_{2,3}} + def_{r_{2,3}} = Dem_2$$

Restrições de acoplamento temporal:

Estágio 1:

$$turb_{1,r_{1,1}} + arm_{1,r_{1,1}} + vert_{1,r_{1,1}} = Afl_{1,r_{1,1}} + arm_{1,A(r_{1,1})}$$

$$turb_{2,r_{1,1}} + arm_{2,r_{1,1}} + vert_{2,r_{1,1}} - arm_{1,r_{1,1}} - vert_{1,r_{1,1}} =$$

$$Afl_{2,r_{1,1}} + arm_{2,A(r_{1,1})}$$

Estágio 2, nó 1:

$$\begin{aligned} -arm_{1,r_{1,1}} + turb_{1,r_{2,1}} + arm_{1,r_{2,1}} + vert_{1,r_{2,1}} &= Afl_{1,r_{2,1}} \\ -arm_{2,r_{1,1}} + turb_{2,r_{2,1}} + arm_{2,r_{2,1}} + vert_{2,r_{2,1}} - arm_{1,r_{2,1}} + \\ &- vert_{1,r_{2,1}} = Afl_{2,r_{2,1}} \end{aligned}$$

Estágio 2, nó 2:

$$\begin{aligned} -arm_{1,r_{1,1}} + turb_{1,r_{2,2}} + arm_{1,r_{2,2}} + vert_{1,r_{2,2}} &= Afl_{1,r_{2,2}} \\ -arm_{2,r_{1,1}} + turb_{2,r_{2,2}} + arm_{2,r_{2,2}} + vert_{2,r_{2,2}} - arm_{1,r_{2,2}} + \\ &- vert_{1,r_{2,2}} = Afl_{2,r_{2,2}} \end{aligned}$$

Estágio 2, nó 3:

$$\begin{aligned} -arm_{1,r_{1,1}} + turb_{1,r_{2,3}} + arm_{1,r_{2,3}} + vert_{1,r_{2,3}} &= Afl_{1,r_{2,3}} \\ -arm_{2,r_{1,1}} + turb_{2,r_{2,3}} + arm_{2,r_{2,3}} + vert_{2,r_{2,3}} - arm_{1,r_{2,3}} \\ &- vert_{1,r_{2,3}} = Afl_{2,r_{2,3}} \end{aligned}$$

Restrições de caixa:

$$gt_1^{\min} \leq gt_{1,r_{i,q}} \leq gt_1^{\max}$$

$$turb_1^{\min} \leq turb_{1,r_{i,q}} \leq turb_1^{\max}$$

$$arm_1^{\min} \leq arm_{1,r_{i,q}} \leq arm_1^{\max}$$

$$vert_1^{\min} \leq vert_{1,r_{i,q}} \leq vert_1^{\max}$$

$$def^{\min} \leq def_{1,r_{i,q}} \leq def^{\max}$$

$$gt_2^{\min} \leq gt_{2,r_{i,q}} \leq gt_2^{\max}$$

$$turb_2^{\min} \leq turb_{2,r_{i,q}} \leq turb_2^{\max}$$

$$arm_2^{\min} \leq arm_{2,r_{i,q}} \leq arm_2^{\max}$$

$$vert_2^{\min} \leq vert_{2,r_{i,q}} \leq vert_2^{\max}$$

$$t = 1, 2$$

$$q = 1, \dots, Q_t$$

$$Q_1 = 1; Q_2 = 3$$

4.5.3. Exemplo do modelo por cenários

Já para o caso do modelo por cenários, a aplicação do modelo matemático (3.11) ao problema exemplo resulta em (4.9). Nesse modelo, as partes específicas para cada cenário estão evidenciadas, assim como as restrições de não-antecipatividade.

$$\begin{aligned} \min & p_1(ct_1 \cdot gt_{1,1,1} + ct_2 \cdot gt_{2,1,1} + cd \cdot def_{1,1} + ct_1 \cdot gt_{1,2,1} + \\ & ct_2 \cdot gt_{2,2,1} + cd \cdot def_{2,1}) + \\ & p_2(ct_1 \cdot gt_{1,1,2} + ct_2 \cdot gt_{2,1,2} + cd \cdot def_{1,2} + ct_1 \cdot gt_{1,2,2} + \\ & ct_2 \cdot gt_{2,2,2} + cd \cdot def_{2,2}) + \\ & p_3(ct_1 \cdot gt_{1,1,3} + ct_2 \cdot gt_{2,1,3} + cd \cdot def_{1,3} + ct_1 \cdot gt_{1,2,3} + \\ & ct_2 \cdot gt_{2,2,3} + cd \cdot def_{2,3}) \end{aligned}$$

s.a.:

Restrições do cenário 1:

(4.9)

$$\delta_1 \cdot turb_{1,1,1} + \beta_1 \cdot arm_{1,1,1} + \delta_2 \cdot turb_{2,1,1} + \beta_2 \cdot arm_{2,1,1} + \\ gt_{1,1,1} + gt_{2,1,1} + def_{1,1} = Dem_1$$

$$turb_{1,1,1} + arm_{1,1,1} + vert_{1,1,1} = Afl_{1,1,1} + arm_{1,0}$$

$$turb_{2,1,1} + arm_{2,1,1} + vert_{2,1,1} - arm_{1,1,1} - vert_{1,1,1} = \\ Afl_{2,1,1} + arm_{2,0}$$

$$\delta_1 \cdot turb_{1,2,1} + \beta_1 \cdot arm_{1,2,1} + \delta_2 \cdot turb_{2,2,1} + \beta_2 \cdot arm_{2,2,1} + \\ gt_{1,2,1} + gt_{2,2,1} + def_{2,1} = Dem_2$$

$$\begin{aligned}
& -arm_{1,1,1} + turb_{1,2,1} + arm_{1,2,1} + vert_{1,2,1} = Afl_{1,2,1} \\
& -arm_{2,1,1} + turb_{2,2,1} + arm_{2,2,1} + vert_{2,2,1} - arm_{1,2,1} + \\
& \quad - vert_{1,2,1} = Afl_{2,2,1}
\end{aligned}$$

Restrições do cenário 2:

$$\begin{aligned}
& \delta_1 \cdot turb_{1,1,2} + \beta_1 \cdot arm_{1,1,2} + \delta_2 \cdot turb_{2,1,2} + \beta_2 \cdot arm_{2,1,2} + \\
& \quad gt_{1,1,2} + gt_{2,1,2} + def_{1,2} = Dem_1 \\
& turb_{1,1,2} + arm_{1,1,2} + vert_{1,1,2} = Afl_{1,1,2} + arm_{1,0} \\
& turb_{2,1,2} + arm_{2,1,2} + vert_{2,1,2} - arm_{1,1,2} - vert_{1,1,2} = \\
& \quad Afl_{2,1,2} + arm_{2,0} \\
& \delta_1 \cdot turb_{1,2,2} + \beta_1 \cdot arm_{1,2,2} + \delta_2 \cdot turb_{2,2,2} + \beta_2 \cdot arm_{2,2,2} + \\
& \quad gt_{1,2,2} + gt_{2,2,2} + def_{2,2} = Dem_2 \\
& -arm_{1,1,2} + turb_{1,2,2} + arm_{1,2,2} + vert_{1,2,2} = Afl_{1,2,2} \\
& -arm_{2,1,2} + turb_{2,2,2} + arm_{2,2,2} + vert_{2,2,2} - arm_{1,2,2} + \\
& \quad - vert_{1,2,2} = Afl_{2,2,2}
\end{aligned}$$

Restrições do cenário 3:

$$\begin{aligned}
& \delta_1 \cdot turb_{1,1,3} + \beta_1 \cdot arm_{1,1,3} + \delta_2 \cdot turb_{2,1,3} + \beta_2 \cdot arm_{2,1,3} + \\
& \quad gt_{1,1,3} + gt_{2,1,3} + def_{1,3} = Dem_1 \\
& turb_{1,1,3} + arm_{1,1,3} + vert_{1,1,3} = Afl_{1,1,3} + arm_{1,0} \\
& turb_{2,1,3} + arm_{2,1,3} + vert_{2,1,3} - arm_{1,1,3} - vert_{1,1,3} = \\
& \quad Afl_{2,1,3} + arm_{2,0} \\
& \delta_1 \cdot turb_{1,2,3} + \beta_1 \cdot arm_{1,2,3} + \delta_2 \cdot turb_{2,2,3} + \beta_2 \cdot arm_{2,2,3} + \\
& \quad gt_{1,2,3} + gt_{2,2,3} + def_{2,3} = Dem_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -arm_{1,1,3} + turb_{1,2,3} + arm_{1,2,3} + vert_{1,2,3} = Afl_{1,2,3} \\
& -arm_{2,1,3} + turb_{2,2,3} + arm_{2,2,3} + vert_{2,2,3} - arm_{1,2,3} \\
& - vert_{1,2,3} = Afl_{2,2,3}
\end{aligned}$$

Restrições de não-antecipatividade (para o nó do estágio 1):

(cenários 1 e 2)

$$turb_{uhe,1,1} = turb_{ute,1,2}$$

$$arm_{uhe,1,1} = arm_{ute,1,2}$$

$$vert_{uhe,1,1} = vert_{ute,1,2}$$

$$gt_{uhe,1,1} = gt_{ute,1,2}$$

$$def_{1,1} = def_{1,2}$$

(cenários 2 e 3)

$$turb_{uhe,1,2} = turb_{uhe,1,3}$$

$$arm_{uhe,1,2} = arm_{uhe,1,3}$$

$$vert_{uhe,1,2} = vert_{uhe,1,3}$$

$$gt_{ute,1,2} = gt_{ute,1,3}$$

$$def_{1,2} = def_{1,3}$$

(cenários 3 e 1)

$$turb_{uhe,1,3} = turb_{uhe,1,1}$$

$$arm_{uhe,1,3} = arm_{uhe,1,1}$$

$$vert_{uhe,1,3} = vert_{uhe,1,1}$$

$$gt_{ute,1,3} = gt_{ute,1,1}$$

$$def_{1,3} = def_{1,1}$$

Restrições de caixa:

$$gt_{ute}^{\min} \leq gt_{ute,t,s} \leq gt_{ute}^{\max}$$

$$turb_{uhe}^{\min} \leq turb_{uhe,t,s} \leq turb_{uhe}^{\max}$$

$$arm_{uhe}^{\min} \leq arm_{uhe,t,s} \leq arm_{uhe}^{\max}$$

$$vert_{uhe}^{\min} \leq vert_{uhe,t,s} \leq vert_{uhe}^{\max}$$

$$def^{\min} \leq def_{t,s} \leq def^{\max}$$

$$t = 1, 2$$

$$s = 1, 2, 3$$

$$UTE = \{1, 2\}$$

$$UHE = \{1, 2\}$$

4.6. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção tem como objetivo avaliar a solução do problema de Programação Estocástica original (árvore de cenários completa) e comparar com as simplificações descritas acima.

4.6.1. O problema

Considere como problema estudado para esta seção o problema apresentado na Seção 4.5. O objetivo do problema é atender uma demanda igual a 700 MWmês ao menor custo possível para um período de planejamento de dois estágios. A usina hidrelétrica a montante (UHE 1) tem capacidade máxima de volume turbinado mensal igual a 600 hm³ e armazenamento máximo de 2.000 hm³. Por sua vez, a usina hidrelétrica a jusante (UHE 2) tem limite de volume turbinado mensal igual a 350 hm³ e capacidade de armazenamento máximo de 1.000 hm³. Os volumes iniciais dos reservatórios das usinas 1 e 2 são iguais a 450 hm³ e 90 hm³, respectivamente. Na Tabela 4.1 são apresentadas as características das usinas hidrelétricas, inclusive os coeficientes da função de produção.

Tabela 4.1 - Dados das Usinas Hidrelétricas.

Usina Hidrelétrica	Armazena-mento Máximo (hm ³)	Armazena-mento inicial (hm ³)	Volume Turbinado Máximo (hm ³)	δ (MWmê s/ hm ³)	β (MWmês/ hm ³)
1	2.000	450	600	1,0	0,03
2	1.000	90	350	0,6	0,01

Os valores para as vazões incrementais aos reservatórios da árvore de cenários (Figura 4.3) são apresentados na Tabela 4.2. Esses cenários são considerados equiprováveis.

Tabela 4.2 – Vazões Incrementais aos Reservatórios (hm³).

Usina Hidrelétrica	Estágio 1	Estágio 2		
		Nó 1 (alto)	Nó 2 (médio)	Nó 3 (baixo)
1	50	78	65	42,25
2	10	48	40	26

O custo operacional do sistema é intrinsecamente relacionado ao custo de produção das usinas termelétricas. No exemplo proposto, as usinas termelétricas UTE 1 e UTE 2 apresentam custos variáveis unitários iguais a 10 R\$/MWmês e 40 R\$/MWmês, respectivamente. A produção máxima pela usina termelétrica UTE 1 é igual a 120 MWmês e pela usina termelétrica UTE 2 é igual a 700 MWmês, enquanto a produção mínima foi considerada zero. Para este exemplo, a possibilidade de déficit foi desconsiderada. A Tabela 4.3 apresenta, de forma resumida, as características das usinas termelétricas.

Tabela 4.3 - Dados das Usinas Termelétricas.

Usina Termelétrica	Custo Variável Unitário (R\$/MWmês)	Geração Máxima (MWmês)
1	10	120
2	40	700

4.6.2. A solução pela Programação Estocástica

Nesta seção, o problema de Programação Estocástica, conforme o modelo (4.8), que representa o problema original, considerando simultaneamente todos os cenários da árvore de cenários, é resolvido. Os resultados para o problema exemplo, obtidos por meio de um solver de problemas de Programação Linear, são apresentados na Tabela 4.4. Nessa tabela, tanto o custo ótimo de operação quanto os valores assumidos pelas variáveis de decisão são apresentados. Esta solução é a exata para o problema original e será considerada como *benchmark* para as comparações realizadas nas seções seguintes.

Tabela 4.4 - Solução Ótima do Problema Original.

Estágio/ cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)
1 -	120,0	112,5	250,0	250,0	0,0	350,0	0,0	0,0
alto	120,0	41,7	328,0	0,0	0,0	350,0	26,0	0,0
2 médio	120,0	54,9	315,0	0,0	0,0	350,0	5,0	0,0
baixo	120,0	96,8	292,3	0,0	0,0	318,3	0,0	0,0
Custo esperado:							9.479,9	

4.7. O EFEITO DA APLICAÇÃO DE SIMPLIFICAÇÕES AO PROBLEMA

Os modelos de otimização apresentados anteriormente consideram todos os cenários simultaneamente. Quando a árvore de cenários é muito grande, a solução do problema demanda elevado esforço computacional, o que sugere a introdução simplificações no modelo estocástico. Nesse contexto, duas simplificações são estudadas nesta seção.

4.7.1. Simplificação 1: o problema do valor esperado

Na primeira simplificação, resolve-se um único problema, no qual as variáveis estocásticas são substituídas pelos respectivos valores esperados (esta abordagem é conhecida como o Problema do Valor Esperado, ou em inglês, *Expected Value*).

O cenário esperado referente à árvore de cenários do problema exemplo é apresentado na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Valor Esperado Das Vazões (hm³).

Usina Hidrelétrica	Estágio 1	Estágio 2
1	50	61,75
2	10	38

O problema do valor esperado tem a solução apresentada na Tabela 4.6, a seguir:

Tabela 4.6 - Solução Ótima para o Problema.

Estágio/ cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)
1 -	120,0	112,9	249,8	250,2	0,0	349,8	0,0	0,0
2 espe- rado	120,0	58,0	312,0	0,0	0,0	350,0	0,0	0,0
Custo:							9.235,7	

Observa-se que o custo de operação resultante é menor do que o encontrado para o problema original. Entretanto, o custo do problema do valor esperado não representa uma solução melhor do que a do problema original, mas sim otimista devido à simplificação. Com a implementação da solução obtida para o primeiro estágio, ter-se-ia os custos apresentados na Tabela 4.7 para cada nó. Os custos para cada cenário e o esperado estão apresentados na Tabela 4.8.

Tabela 4.7 – Resultado para Cada Nó Decorrente da Aplicação da Solução do Problema do Valor Esperado.

Estágio / cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)	Custo para o nó
1	120,0	112,9	249,8	250,2	0,0	349,8	0,0	0,0	5.716
alto	120,0	41,5	328,2	0,0	0,0	350,0	26,2	0,0	2.860
me- dio	120,0	54,7	315,2	0,0	0,0	350,0	5,2	0,0	3.388
bai- xo	119,9	555,7	0,0	292,5	0,0	26,0	0,0	0,0	23.427

Tabela 4.8 – Resultado para Cada Cenário e Esperado da Aplicação da Solução do Problema do Valor Esperado.

Cenário	Custo para o cenário
alto	8.575,2
médio	9.103,6
baixo	29.143,7
Resultado esperado	15.607,5

Ao aplicar o resultado para o primeiro estágio do problema do valor esperado, o custo para os cenários alto e médio (8.575,2 e 9.103,6) ficam abaixo do custo obtido com o problema original (9.479,9, conforme Tabela 4.4). Entretanto, o custo que seria observado caso o cenário baixo se realizasse é da ordem de três vezes (29.143,7) o valor da solução do problema original. Como consequência de aplicar o resultado para o primeiro estágio resultante do problema do valor esperado, tem-se um custo esperado de 15.607,5, superior ao custo esperado que seria obtido a partir do problema original de programação estocástica.

4.7.2. Simplificação 2: análise de cenários independentes

Nesta abordagem, resolve-se um problema para cada cenário, desprezando-se a não-antecipatividade, e implementa-se o valor esperado das variáveis de decisão. As soluções para cada cenário são apresentadas nas tabelas abaixo:

Tabela 4.9 - Solução Ótima para o Cenário Alto.

Estágio / cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)
1 -	120,0	112,5	250,0	250,0	0,0	350,0	0,0	0,0
2 alto	120,0	41,7	328,0	0,0	0,0	350,0	26,0	0,0
Custo:							8.569,6	

Tabela 4.10 - Solução Ótima para o Cenário Médio.

Estágio / cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)
1 -	120,0	112,5	250,0	250,0	0,0	350,0	0,0	0,0
2 me- dio	120,0	55,0	315,0	0,0	0,0	350,0	5,0	0,0
Custo:							9.098,0	

Tabela 4.11 - Solução Ótima para o Cenário Baixo.

Estágio / cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)
1 -	120,0	162,3	218,2	281,8	0,0	318,2	0,0	0,0
2 bai- xo	120,0	46,0	324,0	0,0	0,0	350,0	0,0	0,0
Custo:							10.733,9	

Neste ponto, faz-se interessante analisar o valor esperado dos resultados para os três cenários independentes, conforme pode ser visto na Tabela 4.12. Observa-se que o valor esperado do custo de operação é 9.467,2, inferior ao do problema original (9.479,9, Tabela 4.4). Assim como para o problema do valor esperado, o custo para o problema simplificado não representa o real custo do problema original.

Tabela 4.12 – Valor Esperado das Soluções Obtidas para os Cenários Independentes.

Estágio/ cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)
1 espe- rado	120,0	129,1	239,4	260,6	0,0	339,4	0,0	0,0
2 espe- rado	120,0	47,6	322,3	0,0	0,0	350,0	10,3	0,0
Custo:								9.467,2

Assim, faz-se interessante avaliar o resultado da aplicação da operação obtida para o primeiro estágio. Na Tabela 4.13 são apresentados os resultados esperados (custos e política de operação para o segundo estágio) caso cada cenário se realize. Na Tabela 4.14 são apresentados os resultados obtidos para cada cenário. A partir dessa tabela conclui-se que a aplicação da política de operação obtida a partir da avaliação para cenários independente resulta em um custo de operação (9.633,7) superior ao que seria obtido pelo problema original (9.479,9).

Tabela 4.13 – Resultado para Cada Nó Decorrente da Aplicação do Valor Esperado das Soluções Obtidas para os Cenários Independentes.

Estágio / cenário	$gt_{1,t}$ (MW mês)	$gt_{2,t}$ (MW mês)	$turb_{1,t}$ (hm ³)	$arm_{1,t}$ (hm ³)	$vert_{1,t}$ (hm ³)	$turb_{2,t}$ (hm ³)	$arm_{2,t}$ (hm ³)	$vert_{2,t}$ (hm ³)	Custo para o cenário
1 espe- rado	120,0	129,1	239,4	260,6	0,0	339,4	0,0	0,0	6.364
2 alto	120,0	31,1	338,6	0,0	0,0	350,0	36,6	0,0	2.444
me- dio	120,0	44,3	325,6	0,0	0,0	350,0	15,6	0,0	2.972
bai- xo	120,0	79,9	302,8	0,0	0,0	328,8	0,0	0,0	4.396

Tabela 4.14 – Resultado para Cada Cenário e Esperado da Aplicação do Valor Esperado das Soluções Obtidas para os Cenários Independentes.

Cenário	Custo para o cenário
alto	8.806,7
médio	9.335,1
baixo	10.759,3
Resultado esperado	9.633,7

4.8. CONCLUSÕES

Este capítulo apresentou o problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo no contexto da Programação Estocástica. Inicialmente, foram apresentadas as características do problema que devem ser consideradas no modelo matemático. A partir dessas características, o problema foi modelado matematicamente de duas formas distintas, porém equivalentes: por nós (com a não-antecipatividade modelada implicitamente) e por cenários (com a não-antecipatividade modelada explicitamente). Esses modelos foram ilustrados a partir de um problema literal de pequeno porte.

Após apresentado o modelo matemático do problema, um estudo referente ao efeito de simplificações na árvore de cenários é apresentado na última seção. Como resultado, foi verificado que simplificações podem resultar em custos de operação maiores do que se teria resolvendo-se o problema original. Além do custo mais elevado, poderiam ser obtidas inviabilidades na operação caso cenários extremos ocorressem. A conclusão fundamental desse estudo é que a solução do problema pela Programação Estocástica tem como resultado a solução viável e de menor custo de operação, em contraste com soluções obtidas por meio das simplificações adotadas.

Dado que o problema utilizado como exemplo neste capítulo é de pequeno porte, para problemas reais é necessária a utilização de métodos apropriados para a sua solução. Nesse sentido, o *Progressive Hedging*, apresentado no Capítulo 5, tem como princípio a decomposição do problema de grande em subproblemas menores e de solução mais fácil. A sua aplicação prática à solução de um problema de médio porte e sua comparação com o método tradicional, a Decomposição Aninhada, serão apresentados no Capítulo 6.

5. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA VIA *PROGRESSIVE HEDGING*

5.1. INTRODUÇÃO

Dada à modelagem das vazões afluentes como variáveis aleatórias, o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos (Capítulo 2) resulta em um problema de Programação Estocástica (Capítulo 3). As características do problema referentes à etapa de curto prazo e a sua modelagem matemática foram apresentadas no Capítulo 4. Devido à característica de grande porte do problema, um método adequado deve ser utilizado para resolvê-lo.

Neste capítulo, o método conhecido como *Progressive Hedging* é apresentado. Este método tem relações importantes com o Lagrangeano Aumentado e com a Relaxação Lagrangeana, fazendo-se interessante a apresentação desses dois outros métodos.

A Relaxação Lagrangeana, apresentada na Seção 5.2, provoca a decomposição do problema original em diversos subproblemas menores. Entretanto, após a solução do problema, a solução primal pode não ser viável. O Lagrangeano Aumentado, apresentado na Seção 5.3, acrescenta um termo quadrático ao problema, que além de melhorar a viabilidade da solução primal, assegura características ao problema, que fazem com que ele seja resolvido de forma eficiente até mesmo por métodos simples, como o método do gradiente. Esse termo quadrático, no entanto, pode distorcer as informações dos multiplicadores de Lagrange (questão tratada na Seção 5.4) e leva a um problema o qual a sua decomposição em problemas menores não é diretamente possível. O *Progressive Hedging* (apresentado na Seção 5.5) utiliza um artifício matemático para provocar a decomposição no Lagrangeano Aumentado. Na Seção 5.6, o *Progressive Hedging* é aplicado ao problema literal de pequeno porte introduzido no Capítulo 4.

5.2. RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

Uma das estratégias mais comuns aplicadas na solução de problemas de grande porte é a sua divisão em subproblemas menores e de solução mais fácil. Nesse sentido, a Relaxação Lagrangeana se apóia na teoria da dualidade e transfere para a função objetivo (“relaxa”) algumas restrições estrategicamente escolhidas, provocando a decomposição do problema original.

Considere, inicialmente, o problema de otimização (5.1), o qual se deseja decompor em subproblemas menores. Considere também que neste problema exista um conjunto de restrições tais que, caso forem retiradas do conjunto original de restrições, o problema resultante consistiria em diversos subproblemas independentes. Essas restrições, conhecidas por “restrições complicadoras”, estão apresentadas no problema (5.1) como $c_j(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 &\min f(x) \\
 &\text{s.a.:} \\
 &\quad c_j(x) = 0 \qquad \qquad \qquad (5.1) \\
 &\quad j = 1, \dots, J \\
 &\quad x \in X
 \end{aligned}$$

Essas restrições complicadoras podem ser retiradas do conjunto de restrições e adicionadas à função objetivo multiplicadas por um fator π_j , processo chamado de relaxação. A nova função objetivo relaxada é conhecida como Função Lagrangeana, sendo apresentada em (5.2). O fator π_j é a variável dual (multiplicador de Lagrange) associada à restrição $c_j(x) = 0$.

$$L(x, \pi) = f + \sum_{j=1}^J \pi_j c_j(x) \quad (5.2)$$

Com essa relaxação obtém-se o problema relaxado (5.3), onde $\theta(\pi)$ é conhecido como a Função Dual. Tal problema é, ao contrário do original, formado por diversos subproblemas que não estão mais acoplados pelo conjunto de restrições. Assim, tais subproblemas podem ser separados e tratados como problemas de otimização independentes.

$$\theta(\pi) = \min_{x \in X} L(x, \pi) \quad (5.3)$$

Observe que a Função Lagrangeana é função das variáveis primais x e das variáveis duais π_j das restrições complicadoras. Pela teoria da dualidade, ao aplicar a Relaxação Lagrangeana surge o Problema Dual (5.4) (Lemaréchal). Por meio da solução de tal problema, determinam-se os valores ótimos para π_j .

$$\begin{aligned} \max \theta(\pi) \\ \pi \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.4)$$

Uma vez que o Problema Dual é não-diferenciável¹¹, o mesmo deve ser resolvido por métodos de otimização específicos, dentre os quais destacam-se os métodos do Subgradiente, Planos Cortantes e Feixes.

¹¹ A Função Dual tem múltiplas soluções para um único conjunto de multiplicadores de Lagrange, tendo, portanto, várias derivadas em um único

Um aspecto importante da Relaxação Lagrangeana é que, uma vez que o método não garante que as restrições relaxadas sejam satisfeitas, não existe garantia de que uma solução primal viável seja encontrada ao final do processo de solução. Isso significa que a solução obtida pode não ser aplicável na prática. Assim, um processo de recuperação do primal pode ser necessário ao final do processo iterativo da Relaxação Lagrangeana.

5.3. LAGRANGEANO AUMENTADO

Além de relaxar as restrições complicadoras como na Relaxação Lagrangeana, o Lagrangeano Aumentado adiciona um termo quadrático à função objetivo. Este termo introduz ao problema de otimização da Função Dual a busca pela minimização dos desvios quadráticos das restrições complicadoras, evitando problemas de inviabilidade da solução primal¹². A Função Lagrangeano Aumentado é apresentada em (5.5):

$$\Lambda(x, \pi) = f(x) + \sum_{j=1}^J \pi_j c_j(x) + \frac{\rho}{2} \|c_j(x)\|^2 \quad (5.5)$$

$$\rho > 0$$

onde ρ é o parâmetro de penalidade.

ponto. Assim, a Função Dual e, por conseguinte, o Problema Dual são não-diferenciáveis.

¹² Pode-se entender que durante o processo de solução têm-se duas buscas ocorrendo em paralelo: a otimização da função dual e a busca pela viabilidade do primal.

Definida a Função Lagrangeano Aumentado acima, temos a Função Dual do Lagrangeano Aumentado (5.6) e o seu respectivo Problema Dual (5.7):

$$\psi(\pi) = \min_{x \in X} \Lambda(x, \pi) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \max \psi(\pi) \\ \pi \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (5.7)$$

A Função Dual do Lagrangeano Aumentado na forma (5.6) não é diretamente separável em subproblemas (o acoplamento ainda existe pelos termos quadráticos introduzidos na função objetivo). Para contornar essa questão, considere que seja possível substituir algumas variáveis por termos de separabilidade \tilde{x} no problema (5.6) de forma a obter uma Função Dual separável (5.8) em L subproblemas (5.9).

$$\psi(\pi) = \min_{x \in X} \Lambda(x, \tilde{x}, \pi) \quad (5.8)$$

$$\psi_l(\pi) = \min_{x \in X} \Lambda_l(x_l, \tilde{x}, \pi), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (5.9)$$

Diferentemente da Relaxação Lagrangeana, o Problema Dual do Lagrangeano Aumentado é diferenciável. Assim, métodos simples como o método do gradiente (5.10), podem ser utilizados para a solução do problema dual.

$$\begin{aligned}
x^i &= \arg \min_{x \in X} \Lambda(x, \pi^i) \\
\pi^{i+1} &= \pi^i + \rho \cdot c_j(x^i) \\
\rho &> 0
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Existem diversas formas de definir tanto as restrições complicadoras quanto os termos de separabilidade. O método de solução utilizado neste trabalho, o *Progressive Hedging*, que trata essas questões de uma maneira específica, é apresentado na próxima seção.

5.4. AVALIAÇÃO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE DO PROBLEMA DUAL DO LAGRANGEANO AUMENTADO

Um dos subprodutos do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos é vetor de multiplicadores de Lagrange referentes às restrições de atendimento à demanda. Esses multiplicadores no Setor Elétrico como Custos Marginais de Operação (CMO) e traduzem a variação no custo esperado de operação a partir de uma variação na demanda de energia e podem ter implicações na comercialização de energia.

A definição dos multiplicadores de Lagrange é apresentada a seguir, por meio da dualização das restrições do problema e da aplicação das condições de otimalidade de primeira ordem (condições de Karush-Khun-Tucker - KKT). Para tanto, considere o seguinte problema de otimização, o qual é composto por uma função objetivo e dois conjuntos de restrições de igualdade:

$$\begin{aligned}
&\min f(x) \\
&\text{s.a.: } d(x) = 0 \\
&\quad e(x) = 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

onde $c(x)^T = \begin{bmatrix} d(x)^T, e(x)^T \end{bmatrix}$.

Ao relaxar ambos os conjuntos de restrições de igualdade, como na Relaxação Lagrangeana, obtém-se o seguinte problema:

$$\theta(\pi) = \min L(x, \pi) = \min f(x) + d(x)^T \pi_d + e(x)^T \pi_e \quad (5.12)$$

onde $\pi_c^T = \begin{bmatrix} \pi_d^T, \pi_e^T \end{bmatrix}$.

Avaliando as condições de KKT para esse problema dual tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \pi) &= \nabla f(x) + J_d(x)^T \pi_d + J_e(x)^T \pi_e = 0 \\ J_d(x)^T \pi_d + J_e(x)^T \pi_e &= -\nabla f(x) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sendo $J_c(x)^T = \begin{bmatrix} J_d(x)^T, J_e(x)^T \end{bmatrix}$ e $\pi_c^T = \begin{bmatrix} \pi_d^T, \pi_e^T \end{bmatrix}$, podemos reescrever (5.13) como:

$$J_c(x)^T \pi_c = -\nabla f(x) \quad (5.14)$$

E, portanto, voltamos à definição de multiplicador de Lagrange (5.15):

$$\pi_c = - J_c(x)^T{}^+ \nabla f(x) \quad (5.15)$$

Onde $J_c(x)^T +$ denota a inversa à esquerda do transposto do Jacobiano, definida a partir de:

$$J_c(x)^T + J_c(x)^T = I \quad (5.16)$$

A preocupação tratada nesta seção advém de que o Lagrangeano Aumentado acrescenta um termo quadrático à função objetivo e que pode distorcer a informação de custo esperado de operação e, conseqüentemente, os multiplicadores de Lagrange. Assim, considere agora aplicar o Lagrangeano Aumentado na restrição $d(x)=0$ do problema (5.11), resultando em (5.17). O que se deseja avaliar é se o termo quadrático de (5.17) distorce os multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned} \psi(\pi) = \min \Lambda(x, \pi) &= \min f(x) + d(x)^T \pi_d + \frac{\rho}{2} \|d(x)\|^2 \\ \text{s.a.: } e(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Relaxando as restrições do problema dual (5.17), obtém-se o seguinte problema relaxado:

$$\Psi'(\pi) = \min \Lambda'(x, \pi) = \min f(x) + d(x)^T \pi_d + \frac{\rho}{2} \|d(x)\|^2 + e(x)^T \pi_e \quad (5.18)$$

Aplicando-se KKT a este problema dual, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_x \Lambda'(\pi) &= \nabla f(x) + J_d(x)^T \pi_d + \frac{\rho}{2} J_d(x)^T d(x) + J_e(x)^T \pi_e = 0 \\ J_d(x)^T \left(\pi_d + \frac{\rho}{2} d(x) \right) + J_e(x)^T \pi_e &= -\nabla f(x) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Considerando agora que no momento em que a convergência é obtida as restrições $d(x)=0$, (na qual se aplicou o Lagrangeano Aumentado) são satisfeitas, portanto o segundo termo dentro dos parênteses de (5.19) fica igual a zero. Assim, obtém-se (5.20) e (5.21), equivalentes a (5.13) e (5.15).

$$\begin{aligned} J_d(x)^T \pi_d + J_e(x)^T \pi_e &= -\nabla f(x) \\ J_e(x)^T \pi_e &= -\nabla f(x) \\ \text{para } d(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

O que resulta em (5.21), igual à (5.15):

$$\begin{aligned} \pi_c &= - J_c(x)^T \nabla f(x) \\ \text{para: } J_c(x)^T &= \left[J_d(x)^T, J_e(x)^T \right], \\ \pi_c^T &= \left[\pi_d^T, \pi_e^T \right] \text{ e} \\ d(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Assim, deduz-se que os multiplicadores de Lagrange obtidos na convergência do processo do Lagrangeano Aumentado não estão distorcidos pelo termo quadrático. Na Seção 6.8 essa questão será avaliada a partir de simulações numéricas.

5.5. *PROGRESSIVE HEDGING*

O *Progressive Hedging* (Rockafellar *et al.*, 1991) realiza a decomposição do problema de Programação Estocástica em cenários, ou seja, cada um dos subproblemas resultante da decomposição corresponde a um dos cenários da árvore. Essa decomposição específica é obtida ao considerar a modelagem por cenários como em (3.11) e tratar as restrições de não-antecipatividade como restrições complicadoras.

Conforme mencionado no Capítulo 3, a representação da não-antecipatividade não é única. O *Progressive Hedging* define essas restrições por meio de um conjunto $K_{t,s}$, composto por todos os cenários que compartilham o mesmo nó que s no estágio t , incluindo o próprio s . Com isso, o *Progressive Hedging* define as restrições de não-antecipatividade como:

$$x_{t,s} = \sum_{k \in K_{t,s}} p_k x_{t,k} \quad (5.22)$$

$$s \in S$$

A Equação (5.22) garante que todos os cenários relacionados pela não-antecipatividade em t (pertencam ao mesmo conjunto $K_{t,s}$) tenham a mesma solução para tal estágio.

Considerando as restrições de não-antecipatividade (5.22) como restrições complicadoras, temos a seguinte Função Lagrangeano Aumentado:

$$\Lambda(x_{t,s}, \pi_{t,s}) = f(x_t) + \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \pi_{t,s} \left(x_{t,s} - \sum_{k \in K_{t,s}} p_k x_{t,k} \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \left\| x_{t,s} - \sum_k^{K_{t,s}} p_k x_{t,k} \right\|^2 \quad (5.23)$$

$$x_{t,s} \in X_{t,s}$$

$$t = 1, \dots, T$$

$$s \in S$$

Observa-se que (5.23) ainda não é separável em S subproblemas. Um artifício possível para se obter separação consiste em definir termos de separabilidade, como em (5.24), e aplicá-los aos termos relaxado e quadrático de (5.23). Com isso é possível obter S subproblemas, conforme (5.25).

$$\tilde{x}_{t,s} = \sum_{k \in K_{t,s}} p_k x_{t,k} \quad (5.24)$$

$$s \in S$$

$$\Lambda_s(x_s, \tilde{x}_s, \pi_s) = f(x) + \sum_{t=1}^T (\pi_{t,s}(x_{t,s} - \tilde{x}_{t,s})) + \frac{\rho}{2} \sum_{t=1}^T \|x_{t,s} - \tilde{x}_{t,s}\|^2 \quad (5.25)$$

A partir de (5.25), a Função Dual pode ser escrita na forma de diversos subproblemas como (5.26).

$$\psi_s(\pi) = \min_{x \in X} \Lambda_s(x_s, \tilde{x}_s, \pi_s) \quad (5.26)$$

$$s = 1, \dots, S$$

A solução pelo *Progressive Hedging* segue um processo iterativo onde cada iteração tem três etapas bem-definidas: a solução dos subproblemas (5.26) (que compõem a Função Dual), a atualização dos termos de separabilidade (5.24) e a atualização dos multiplicadores de Lagrange (5.10) (solução do Problema Dual). O processo completo pode ser descrito pelo seguinte algoritmo:

Passo 0 Inicialização:

Escolha \tilde{x}_s^1, π_s^1 e $\rho > 0$ e faça $i = 1$.

Passo 1 Solução dos subproblemas:

Para todo $s \in S$ resolva:

$$x_s^i = \arg \min_{x \in X} \Lambda_s(x_s^i, \tilde{x}_s^i, \pi_s^i)$$

Se $x_s^i = \tilde{x}_s^i$ para todo $s \in S$, então pare: convergência obtida.

Passo 2 Atualize os termos de separabilidade:

$$\tilde{x}_s^{i+1} = \sum_k^{K_{t,s}} p_k x_{t,k}^i$$

Passo 3 Atualize os multiplicadores de Lagrange:

Para todo $s \in S$ aplique o *Método do Gradiente*:

$$\pi_s^{i+1} = \pi_s^i + \rho \cdot x_s^i - \tilde{x}_s^i$$

Faça $i = i + 1$.

Retorne ao Passo 1.

Observa-se que a independência entre os subproblemas resultantes da decomposição pelo *Progressive Hedging* é bastante elevada e que a troca de informações entre subproblemas não é intensiva. Isso sugere que é possível obter uma boa eficiência na paralelização do *Progressive Hedging* (da Silva, 1994; Sommervell).

A solução dos subproblemas (Passo 1) é indiferente ao fato de \tilde{x}_s e π_s serem valores iniciais (Passo 0) ou terem sido calculados na iteração anterior (Passos 2 e 3). Assim, cada iteração do *Progressive Hedging* pode ser vista como um processo independente. Isso sugere que o uso de partida a quente é importante para o bom desempenho do método. Adicionalmente, funções lineares por partes utilizadas para representar funções mais complexas, assim como a função de produção das usinas hidrelétricas, poderiam ser recalculadas a cada iteração, de modo a garantir que haja uma boa representação dessa função em torno do ponto ótimo.

Observando a Função do Lagrangeano Aumentado (5.25) percebe-se sua dependência do parâmetro de penalidade. Valores muito pequenos para o parâmetro de penalidade podem levar a Função Dual do Lagrangeano Aumentado a ficar semelhante à Função Dual da Relaxação Lagrangeana. Assim, a busca pela viabilidade primal se deteriora, assim como a diferenciabilidade do Problema Dual. Por outro lado, valores muito elevados podem levar o termo quadrático a competir com a função objetivo original na Função Dual, de modo que a busca da solução ótima pode perder sua importância no problema de otimização

(5.6) em função da busca pela viabilidade primal. Assim, deve-se tomar cuidado na escolha do valor do parâmetro de penalidade ou utilizar um método que o ajusta ao longo do processo iterativo (Martínez, 2006).

Devido aos termos adicionados à função objetivo, os multiplicadores de Lagrange podem perder sua interpretação original. Essa preocupação é particularmente relevante para os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de atendimento à demanda, uma vez que representam o custo marginal de operação e, conseqüentemente, no Brasil, têm impacto na formação do Preço de Liquidação da Diferenças (PLD, preço *spot*).

5.6. APLICAÇÃO DO *PROGRESSIVE HEDGING* AO PROBLEMA EXEMPLO LITERAL DE PEQUENO PORTE

Nesta seção, a aplicação do *Progressive Hedging* ao problema literal de pequeno porte introduzido na Seção 4.5.1 é apresentada. Para tanto, o modelo matemático com a não-antecipatividade representada explicitamente (4.9), da Seção 4.5.3, é utilizado. De modo que o *Progressive Hedging* descreve as restrições de não-antecipatividade de uma forma específica, diferente da apresentada em (4.9), esta seção é iniciada pela descrição da não-antecipatividade conforme o *Progressive Hedging*.

Inicialmente, os conjuntos de mapeamento da não-antecipatividade ($K_{t,s}$) para o problema (de acordo com a árvore de cenários apresentada na Figura 4.3) são apresentados a seguir:

$$K_{1,1} = \{1, 2, 3\} \quad K_{1,2} = \{1, 2, 3\} \quad K_{1,3} = \{1, 2, 3\} \quad (5.27)$$

A partir dos conjuntos $K_{t,s}$ são definidas as seguintes restrições de não-antecipatividade para cada cenário:

Cenário 1:

Cenário 2:

$$\begin{aligned}
turb_{uhe,1,1} &= \sum_{s=1}^S turb_{uhe,1,s} & turb_{uhe,1,2} &= \sum_{s=1}^S turb_{uhe,1,s} \\
arm_{uhe,1,1} &= \sum_{s=1}^S arm_{uhe,1,s} & arm_{uhe,1,2} &= \sum_{s=1}^S arm_{uhe,1,s} \\
vert_{uhe,1,1} &= \sum_{s=1}^S vert_{uhe,1,s} & vert_{uhe,1,2} &= \sum_{s=1}^S vert_{uhe,1,s} \\
gt_{ute,1,1} &= \sum_{s=1}^S gt_{ute,1,s} & gt_{ute,1,2} &= \sum_{s=1}^S gt_{ute,1,s} \\
def_{1,1} &= \sum_{s=1}^S def_{1,s} & def_{1,2} &= \sum_{s=1}^S def_{1,s}
\end{aligned}$$

Cenário 3:

(5.28)

$$\begin{aligned}
turb_{uhe,1,3} &= \sum_{s=1}^S turb_{uhe,1,s} \\
arm_{uhe,1,3} &= \sum_{s=1}^S arm_{uhe,1,s} \\
vert_{uhe,1,3} &= \sum_{s=1}^S vert_{uhe,1,s} \\
gt_{ute,1,3} &= \sum_{s=1}^S gt_{ute,1,s} \\
def_{1,3} &= \sum_{s=1}^S def_{1,s} \\
uhe &= 1, 2 \\
ute &= 1, 2
\end{aligned}$$

Os termos de separabilidade são definidos a partir do mapeamento (5.27), assim como feito para as restrições de não antecipatividade. Assim, teremos um conjunto de termos de separabilidade para o primeiro estágio, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}
 \overline{turb}_{uhe,1} &= \sum_{s=1}^S turb_{uhe,1,s} \\
 \overline{arm}_{uhe,1} &= \sum_{s=1}^S arm_{uhe,1,s} \\
 \overline{vert}_{uhe,1} &= \sum_{s=1}^S vert_{uhe,1,s} \\
 \overline{gt}_{ute,1} &= \sum_{s=1}^S gt_{ute,1,s} \\
 \overline{def}_1 &= \sum_{s=1}^S def_{1,s}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$uhe = 1, 2$$

$$ute = 1, 2$$

A partir de (5.28) e (5.29), a Função Lagrangeana Aumentada do problema pelo *Progressive Hedging* resulta em (5.30), onde já é possível separar as partes referentes a cada cenário:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^3 p_s \quad ct_1 \cdot gt_{1,1,s} + ct_2 \cdot gt_{2,1,s} + cd \cdot def_{1,s} + ct_1 \cdot gt_{1,2,s} + \\
& + ct_2 \cdot gt_{2,2,s} + cd \cdot def_{2,s} + \\
& \pi_{turb_{uhe,1}} (turb_{uhe,1,1} - \overline{turb}_{uhe,1}) + \pi_{turb_{uhe,2}} (turb_{uhe,1,2} - \overline{turb}_{uhe,1}) \cdot \\
& \pi_{turb_{uhe,3}} (turb_{uhe,1,3} - \overline{turb}_{uhe,1}) + \pi_{arm_{uhe,1}} (arm_{uhe,1,1} - \overline{arm}_{uhe,1}) + \\
& \pi_{arm_{uhe,2}} (arm_{uhe,1,2} - \overline{arm}_{uhe,1}) + \pi_{arm_{uhe,3}} (arm_{uhe,1,3} - \overline{arm}_{uhe,1}) + \\
& \pi_{vert_{uhe,1}} (vert_{uhe,1,1} - \overline{vert}_{uhe,1}) + \pi_{vert_{uhe,2}} (vert_{uhe,1,2} - \overline{vert}_{uhe,1}) + \\
& \pi_{vert_{uhe,3}} (vert_{uhe,1,3} - \overline{vert}_{uhe,1}) + \pi_{gt_{ute,1}} (gt_{ute,1,1} - \overline{gt}_{ute,1}) + \\
& \pi_{gt_{ute,2}} (gt_{ute,1,2} - \overline{gt}_{ute,1}) + \pi_{gt_{ute,3}} (gt_{ute,1,3} - \overline{gt}_{ute,1}) + \\
& \pi_{def_1} (def_{1,1} - \overline{d}_1) + \pi_{def_2} (def_{1,2} - \overline{d}_1) + \pi_{def_3} (def_{1,3} - \overline{d}_1) + \\
& \frac{\rho}{2} \|turb_{uhe,1,1} - \overline{turb}_{uhe,1}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|turb_{uhe,1,2} - \overline{turb}_{uhe,1}\|^2 \\
& + \frac{\rho}{2} \|turb_{uhe,1,3} - \overline{turb}_{uhe,1}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|arm_{uhe,1,1} - \overline{arm}_{uhe,1}\|^2 \\
& + \frac{\rho}{2} \|arm_{uhe,1,2} - \overline{arm}_{uhe,1}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|arm_{uhe,1,3} - \overline{arm}_{uhe,1}\|^2 + \\
& \frac{\rho}{2} \|vert_{uhe,1,1} - \overline{vert}_{uhe,1}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|vert_{uhe,1,2} - \overline{vert}_{uhe,1}\|^2 \\
& + \frac{\rho}{2} \|vert_{uhe,1,3} - \overline{vert}_{uhe,1}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|gt_{ute,1} - \overline{gt}_{ute,1}\|^2 \\
& + \frac{\rho}{2} \|gt_{ute,1,2} - \overline{gt}_{ute,1}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|gt_{ute,1,3} - \overline{gt}_{ute,1}\|^2 + \\
& \frac{\rho}{2} \|def_{1,1} - \overline{def}_1\|^2 + \frac{\rho}{2} \|def_{1,2} - \overline{def}_1\|^2 + \frac{\rho}{2} \|def_{1,3} - \overline{def}_1\|^2 \\
& uhe = 1, 2 \\
& ute = 1, 2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

A Função Dual já decomposta em três subproblemas, cada um referente a um cenário s , resulta em:

$$\begin{aligned}
 \psi_s = \min & \ ct_1 \cdot gt_{1,1,s} + ct_2 \cdot gt_{2,1,s} + cd \cdot def_{1,s} + ct_1 \cdot gt_{1,2,s} + \\
 & \ ct_2 \cdot gt_{2,2,s} + cd \cdot def_{2,s} + \pi_{turb_{uhe,s}} (turb_{1,s} - \overline{turb_1}) + \\
 & \ \pi_{arm_{uhe,s}} (arm_{1,s} - \overline{arm_1}) + \pi_{vert_{uhe,s}} (vert_{1,s} - \overline{vert_1}) + \\
 & \ \pi_{gt_{ute,s}} (gt_{1,s} - \overline{gt_1}) + \pi_{def_s} (def_{1,s} - \overline{def_1}) + \\
 & \ \frac{\rho}{2} \|turb_{uhe,1,s} - \overline{turb_{uhe,1}}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|arm_{uhe,1,s} - \overline{arm_{uhe,1}}\|^2 \\
 & \ + \frac{\rho}{2} \|vert_{uhe,1,s} - \overline{vert_{uhe,1}}\|^2 + \frac{\rho}{2} \|gt_{ute,1,s} - \overline{gt_{ute,1}}\|^2 \\
 & \ + \frac{\rho}{2} \|def_{1,s} - \overline{def_1}\|^2
 \end{aligned}$$

s.a.:

Restrições de atendimento à demanda: (5.31)

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \cdot turb_{1,1,s} + \beta_1 \cdot arm_{1,1,s} + \delta_2 \cdot turb_{2,1,s} + \beta_2 \cdot arm_{2,1,s} \\
 + gt_{1,1,s} + gt_{2,1,s} + def_{1,s} &= Dem_1 \\
 \delta_1 \cdot turb_{1,2,s} + \beta_1 \cdot arm_{1,2,s} + \delta_2 \cdot turb_{2,2,s} + \beta_2 \cdot arm_{2,2,s} \\
 + gt_{1,2,s} + gt_{2,2,s} + def_{2,s} &= Dem_2
 \end{aligned}$$

Restrição da conservação da massa d'água:

$$\begin{aligned}
 turb_{1,1,s} + arm_{1,1,s} + vert_{1,1,s} &= Afl_{1,1,s} + arm_{1,0} \\
 turb_{2,1,s} + arm_{2,1,s} + vert_{2,1,s} - arm_{1,1,s} - vert_{1,1,s} \\
 &= Afl_{2,1,s} + arm_{2,0} \\
 - arm_{1,1,s} + turb_{1,2,s} + arm_{1,2,s} + vert_{1,2,s} &= Afl_{1,2,s} \\
 - arm_{2,1,s} + turb_{2,2,s} + arm_{2,2,s} + vert_{2,2,s} - arm_{1,2,s} + \\
 - vert_{1,2,s} &= Afl_{2,2,s}
 \end{aligned}$$

Restrições de caixa

$$turb_{uhe}^{\min} \leq turb_{uhe,t,s} \leq turb_{uhe}^{\max}$$

$$arm_{uhe}^{\min} \leq arm_{uhe,t,s} \leq arm_{uhe}^{\max}$$

$$vert_{uhe}^{\min} \leq vert_{uhe,t,s} \leq vert_{uhe}^{\max}$$

$$gt_{ute}^{\min} \leq gt_{ute,t,s} \leq gt_{ute}^{\max}$$

$$def^{\min} \leq def_{t,s} \leq def^{\max}$$

$$uhe=1,2$$

$$ute=1,2$$

$$t = 1,2$$

5.7. CONCLUSÕES

Neste capítulo, o *Progressive Hedging*, método de solução de problemas de Programação Estocástica, foi apresentado. Assim como a Relaxação Lagrangeana, o *Progressive Hedging* provoca a decomposição do problema original em diversos subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos. Cada um dos subproblemas resultantes dessa decomposição representa um dos cenários da árvore. Por ser um método baseado no Lagrangeano Aumentado, sua Função Lagrangeana tem um termo quadrático que implica em duas qualidades interessantes: (i) o Problema Dual é diferenciável, de modo que sua solução pode ser obtida por métodos simples como o método do gradiente e (ii) há uma busca pela viabilidade das variáveis primais intrínseca ao próprio processo de solução.

No capítulo seguinte, os resultados obtidos pela implementação computacional do *Progressive Hedging* são apresentados. A avaliação de alguns aspectos levantados neste capítulo, em especial o parâmetro de penalidade e a inicialização dos termos de separabilidade e dos multiplicadores de Lagrange, é realizada a partir de resultados práticos. O desempenho computacional do *Progressive Hedging* é avaliado e comparado ao da Decomposição Aninhada e da solução por um problema de programação linear único (Equivalente Determinístico).

6. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

6.1. INTRODUÇÃO

Esse capítulo objetiva o estudo da aplicação prática do *Progressive Hedging* ao problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos.

O problema resolvido neste capítulo é apresentado na Seção 6.2. Na Seção 6.3 são definidos os critérios para a avaliação da solução primal e do valor da função objetivo. Um estudo sobre partida a quente (inicialização dos termos de separabilidade e dos multiplicadores de Lagrange) é apresentado na Seção 0, enquanto a avaliação da influência do parâmetro de penalidade na solução é apresentada na Seção 6.5. A avaliação referente à situação da viabilidade da solução primal é apresentada na Seção 6.6. Com o intuito de avaliar a sua competitividade, na Seção 6.7, a solução pelo *Progressive Hedging* é comparada às soluções obtidas pela Decomposição Aninhada e por um problema de Programação Linear (PL) único, para duas árvores de cenários (embora a estrutura da árvore de cenários seja a mesma, as realizações são distintas).

6.2. O PROBLEMA DE MÉDIO PORTE

O sistema hidrotérmico deste estudo consiste de 21 usinas hidrelétricas, 20 termelétricas e quatro subsistemas distintos e interconectados. A potência instalada total é de cerca de 57 GW, composta por 47,5 GW de usinas hidrelétricas e 9,5 GW de usinas termelétricas. As usinas hidrelétricas estão conectadas entre si formando diversas cascatas, tal como pode ser visto na Figura 6.1. Os detalhes do sistema considerado neste estudo são apresentados no Anexo C.

O horizonte de estudo consiste em sete estágios, sendo que os cinco primeiros representam semanas enquanto os dois últimos representam meses. Os dois primeiros estágios são determinísticos enquanto os cinco últimos possuem quatro realizações possíveis para cada realização do

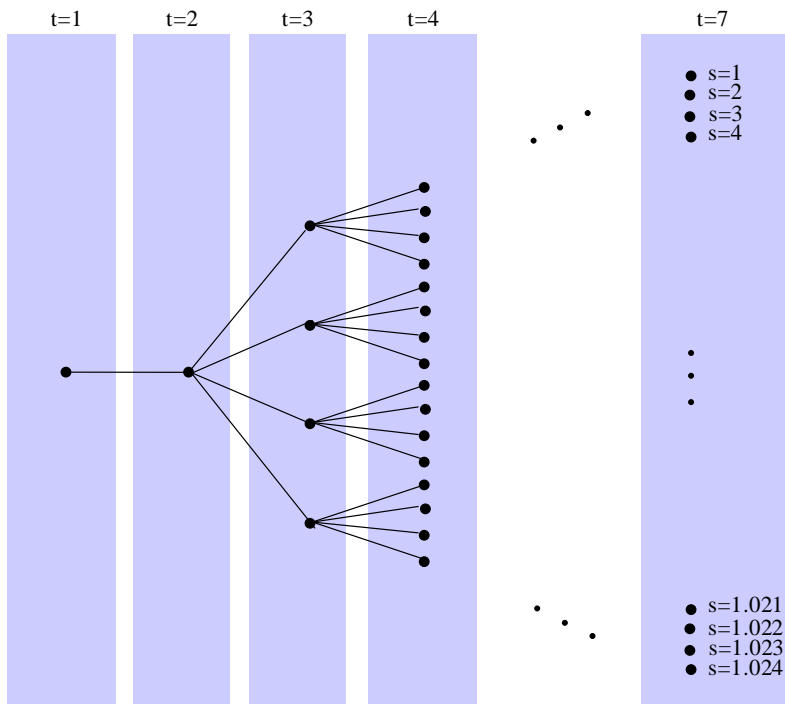


Figura 6.2 – Árvore de Cenários Utilizada na Simulação.

Para uma avaliação mais completa, várias dispersões em relação à média foram consideradas para os quatro nós descendentes de um determinado nó em t . Por exemplo, as figuras a seguir apresentam duas possíveis dispersões para os nós da árvore de cenários da Figura 6.2. Note que, embora tenham a mesma estrutura para a árvore de cenários (conforme), seus nós têm dispersões de 10% e 30% em relação à média.

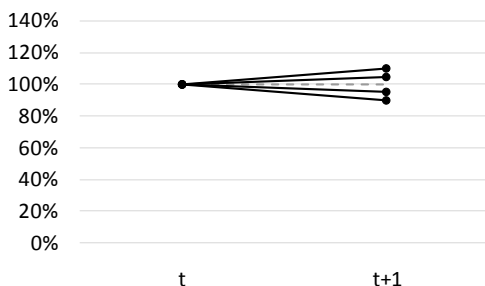


Figura 6.3 – Dispersão de 30% para os Nós das Árvores de Cenários Estudadas.

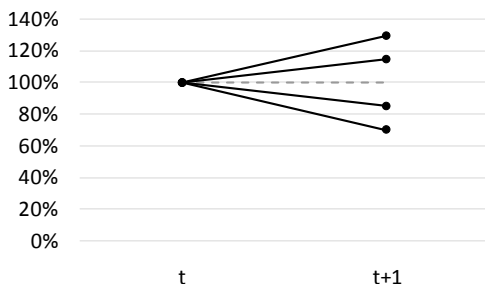


Figura 6.4 – Dispersão de 10% para os Nós das Árvores de Cenários Estudadas.

A função de produção das usinas hidrelétricas é uma função não linear do nível de montante, das vazões turbinada e vertida e do rendimento das turbinas. As funções de produção foram linearizadas por partes conforme (4.1), resultando em quatro partes lineares para as usinas a fio d'água e cinco para as usinas com reservatório de regularização. Os coeficientes das funções de produção para cada usinas encontram-se na Tabela A.4, no Apêndice A.

Uma informação de custo futuro, proveniente de um modelo de mais longo prazo, é também considerada. Essa Função de Custo Futuro é representada por 600 segmentos de funções lineares dependentes dos volumes dos reservatórios a serem entregues no final do último estágio.

As dimensões do problema original de Programação Estocástica (modelo por nós, conforme (4.4)) e para as decomposições por nós e por cenários, conforme utilizado pela Decomposição Aninhada e pelo *Progressive Hedging*, respectivamente, são apresentadas na Tabela 6.1. Observe que, a decomposição por nós resulta em mais subproblemas do que a decomposição por cenários. Por outro lado, tais subproblemas têm dimensões menores (menos variáveis e restrições) do que os obtidos para a decomposição por cenários. A quantidade de subproblemas gerados pelos diferentes tipos de decomposições é definida pela estrutura da árvore de cenários.

Tabela 6.1 – Dimensões dos Problemas para Cada Tipo de Decomposição.

Modelo matemático		Subproblemas	Variáveis por subproblema	Restrições por subproblema
PL único (Equivalente Determinístico)		1	155.382	172.716
Decomposição por nós	estágios até T-1	342	113	126
	estágio T	1.024	114	726
	total	1.366	-	-
Decomposição por cenários		1.024	792	1.482

Para o desenvolvimento dos modelos computacionais foi utilizada a linguagem de programação em C++. Para a solução dos problemas de programação matemática foi utilizado o CPLEX 7.1.0 [ILOG, 2001]. As simulações foram realizadas em uma plataforma computacional composta por um Intel Core 2 Duo 1.66 GHz e 2 GB de memória RAM.

6.3. PARÂMETROS PARA A AVALIAÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO E DA VIABILIDADE DA SOLUÇÃO PRIMAL

Esta seção define parâmetros para a avaliação da função objetivo e da solução primal. O primeiro parâmetro mede a qualidade da solução primal de uma determinada variável, sendo definido pela diferença normalizada entre os valores da variável e do seu termo de separabilidade correspondente, em percentagem, conforme (6.1). Esse parâmetro é chamado de Índice de Inviabilidade Primal da variável e quanto menor for o seu valor, melhor será a situação de viabilidade primal.

$$IIP_x = \left| \frac{x^i - \tilde{x}^i}{x^{\max} - x^{\min}} \right| \quad (6.1)$$

onde:

x^i : valor de uma determinada variável primal na iteração i

\tilde{x}^i : valor do termo de separabilidade na iteração i ;

x^{\max} : limite superior da variável primal;

x^{\min} : limite inferior da variável primal.

Para facilitar a avaliação da viabilidade primal, define-se outros parâmetros: o Índice de Inviabilidade Primal Médio \overline{IIP} (6.2), que corresponde à média dos Índices de Inviabilidade Primal de todas as variáveis, e o Índice de Inviabilidade Primal Máximo \overline{IIP}_{\max} (6.3), que corresponde ao maior valor de Índice de Inviabilidade Primal dentre todas as variáveis:

$$\overline{IIP} = \frac{1}{V} \sum_v^V IPP_{x_v} \quad (6.2)$$

$$\overline{IIP}_{\max} = \max_v (IPP_{x_v}) \quad (6.3)$$

onde:

v : índice de variáveis primais;

V : quantidade de variáveis primais.

O último parâmetro consiste na comparação do valor da função objetivo pelo método em estudo com o mesmo valor obtido pela solução do problema sem decomposição¹³ (Equivalente Determinístico – PL único), em percentagem. É importante observar que a solução pelo Equivalente Determinístico de problemas de grande porte, maiores do que problema tratado nesta seção, não costuma ser factível.

$$\Delta F = \frac{f^i - f^*}{f^*}, \quad (6.4)$$

¹³ A solução do problema sem decomposição (PL único) é possível, devido às dimensões do problema e, portanto, pode ser utilizado como referência. Entretanto, para problemas de grande porte, a solução do problema sem decomposição pode ser difícil ou, até mesmo, inviável.

6.4. AVALIAÇÃO DA PARTIDA A QUENTE

Conforme comentado no capítulo anterior, o *Progressive Hedging* exige a inicialização tanto dos termos de separabilidade quanto dos multiplicadores de Lagrange. Faz-se interessante avaliar qual é a sensibilidade do método em relação a essa inicialização e, eventualmente, determinar uma estratégia de partida a quente. Para tanto, quatro tipos de inicialização foram estudadas:

- Nenhuma: sem partida a quente. Os termos de separabilidade e os multiplicadores de Lagrange foram inicializados com o valor zero;
- VE: os termos de separabilidade foram inicializados com os valores da solução do Problema do Valor Esperado. Os multiplicadores de Lagrange foram inicializados com o valor zero;
- D-10%: os termos de separabilidade e os multiplicadores de Lagrange foram inicializados a partir da solução de um problema similar, com a demanda 10% inferior a do caso base;
- D+10%: os termos de separabilidade e os multiplicadores de Lagrange foram inicializados a partir da solução de um problema similar, com a demanda 10% superior a do caso base;

A idéia de utilizar a solução de um problema similar como partida a quente advém do fato de que em aplicações reais costuma-se tê-las disponível. Por exemplo, nas revisões semanais do Programa Mensal da Operação (PMO) sempre se têm disponível a solução obtida para a semana anterior.

Para isolar alguma interferência do parâmetro de penalidade nas simulações, todos os tipos de partida quente foram simulados para diversos valores para o parâmetro de penalidade. Esses valores estão em escala logarítmica entre 0,01 e 1.000.

Os resultados obtidos para um tempo de execução de uma hora e uma árvore de cenários com uma dispersão de 30% para os nós (os quatro cenários de determinado nó assumem, para o estágio seguinte, os

seguintes valores em relação à média: 30% acima, 15% acima, 15% abaixo e 30% abaixo) são apresentados nas tabelas a seguir. Os resultados para a função objetivo (6.4) são apresentados na Tabela 6.2 enquanto os Índices de Inviabilidade Primal Médio (6.2) são apresentados na Tabela 6.3 e os Índices de Inviabilidade Primal Máximo (6.3) na Tabela 6.4.

Tabela 6.2 – Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Uma Hora - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.

Partida quente	Parâmetro de Penalidade						Média
	0,01	0,1	1	10	100	1.000	
Nenhuma	10,3%	-2,6%	-124%	-363%	-1.524%	-2.800%	-800%
VE	10,3%	10,0%	7,9%	1,7%	-7,6%	-22,8%	-0,1%
D-10%	10,3%	-2,0%	-191%	-491%	-2.230%	-3.210%	-1.019%
D+10%	10,3%	-2,0%	-191%	-491%	-2.229%	-3.209%	-1.019%
Média	10,3%	0,9%	-124%	-336%	-1.498%	-2.310%	

Tabela 6.3 – Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Uma Hora - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.

Partida quente	Parâmetro de Penalidade						Média
	0,01	0,1	1	10	100	1.000	
Nenhuma	4,1%	3,4%	2,8%	2,1%	0,3%	0,1%	2,2%
VE	4,0%	3,5%	2,2%	0,7%	0,3%	0,4%	1,9%
D-10%	4,1%	3,5%	3,4%	1,8%	0,8%	0,1%	2,3%
D+10%	4,1%	3,4%	3,4%	1,8%	0,8%	0,1%	2,3%
Média	4,1%	3,4%	2,9%	1,6%	0,6%	0,2%	

Tabela 6.4 – Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Uma Hora - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.

Partida quente	Parâmetro de Penalidade						Média
	0,01	0,1	1	10	100	1.000	
Nenhuma	99,9%	99,3%	98,8%	89,5%	27,6%	10,3%	70,9%
VE	99,9%	99,5%	96,7%	75,0%	29,5%	17,4%	69,7%
D-10%	99,9%	99,1%	99,9%	75,0%	99,9%	24,8%	83,1%
D+10%	99,9%	99,2%	99,9%	75,0%	99,9%	24,8%	83,1%
Média	99,9%	99,3%	98,8%	78,6%	64,2%	19,3%	

Para todos os casos simulados, a solução com o uso de partida quente baseada na solução do problema do valor esperado (VE) se mostrou superior às demais em quase todas as simulações, especialmente quando somente a função objetivo é observada. Em relação à viabilidade primal médio e máximo, verifica-se que de uma forma geral, foram obtidos baixos valores de \overline{IIP} para essa partida quente. Para o Índice de Inviabilidade Primal Máximo, a partida a quente D+10% foi a mais interessante. Entretanto, faz-se interessante avaliar esses resultados para um tempo de execução maior. Pelos resultados das tabelas 6.4 e 6.5 pode-se obter a mesma conclusão em relação ao tipo de partida quente para um tempo de execução de duas horas.

Tabela 6.5 - Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Duas Horas - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.

Partida quente	Parâmetro de Penalidade						Média
	0,01	0,1	1	10	100	1.000	
Nenhuma	10,3%	10,3%	-71,1%	-219%	-1.068%	-2.509%	-641%
VE	10,3%	9,7%	5,8%	-0,2%	-4,1%	-15,2%	1,0%
D-10%	10,3%	8,7%	-80,7%	-280%	-1.422%	-2.901%	-777%
D+10%	10,3%	8,7%	-81,0%	-281%	-1.423%	-2.900%	-777%
Média	10,3%	9,3%	-56,8%	-195%	-979%	-2.081%	

Tabela 6.6 - Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Duas Horas - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.

Partida quente	Parâmetro de Penalidade						Média
	0,01	0,1	1	10	100	1.000	
Nenhuma	4,0%	3,7%	1,7%	1,2%	0,2%	0,0%	1,8%
VE	3,9%	3,1%	1,5%	0,2%	0,0%	0,0%	1,5%
D-10%	4,0%	3,7%	1,8%	1,8%	0,2%	0,0%	1,9%
D+10%	4,0%	3,7%	1,8%	1,8%	0,2%	0,0%	1,9%
Média	3,9%	3,5%	1,7%	1,3%	0,2%	0,0%	

Tabela 6.7 – Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Duas Horas - Avaliação dos Tipos de Partida Quente.

Partida quente	Parâmetro de Penalidade						Média
	0,01	0,1	1	10	100	1.000	
Nenhuma	99,8%	99,5%	99,6%	99,2%	29,3%	7,0%	72,4%
VE	99,8%	99,3%	96,1%	69,8%	18,5%	10,2%	65,6%
D-10%	99,8%	99,6%	99,1%	96,2%	22,7%	37,8%	75,9%
D+10%	99,8%	99,6%	99,0%	96,2%	22,7%	30,2%	74,6%
Média	99,8%	99,5%	98,5%	90,3%	23,3%	21,3%	

6.5. AVALIAÇÃO PARÂMETRO DE PENALIDADE

Pelos resultados apresentados na seção anterior é possível verificar que quanto maior o valor do parâmetro de penalidade, melhor será a viabilidade primal (e, portanto, menor o \overline{IIP}). Tal comportamento já havia sido levantado teoricamente no Capítulo 5. Por outro lado, em termos do valor da função objetivo, parece haver uma região de valores interessantes para o parâmetro de penalidade entre os valores 10 e 1.000.

Com o intuito de estudar o desempenho do método em função do parâmetro de penalidade, uma nova série de simulações foi realizada

onde variações do problema são resolvidas. De modo a simular variações do problema, foram aplicadas variações na demanda de energia. Os resultados, para uma dispersão de 30% para os nós, são apresentados nas tabelas seguintes:

Tabela 6.8 – Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Uma Hora – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.

Variação da demanda de energia	Parâmetro de Penalidade					
	0,01	0,1	1	10	100	1.000
5%	4,5%	4,4%	3,4%	0,2%	-6,4%	-28,2%
0%	10,3%	10,0%	7,9%	1,7%	-7,6%	-22,8%
-5%	8,6%	7,9%	5,3%	-1,6%	-42,6%	-75,1%

Tabela 6.9 - Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Uma Hora – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.

Variação da demanda de energia	Parâmetro de Penalidade					
	0,01	0,1	1	10	100	1.000
5%	3,4%	3,4%	1,8%	0,8%	0,4%	0,4%
0%	4,0%	3,5%	2,2%	0,7%	0,3%	0,4%
-5%	2,8%	2,2%	1,2%	0,4%	0,2%	0,3%

Tabela 6.10 - Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Uma Hora – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.

Variação da demanda de energia	Parâmetro de Penalidade					
	0,01	0,1	1	10	100	1.000
5%	99,6%	99,6%	99,2%	82,4%	46,2%	21,6%
0%	99,9%	99,5%	96,7%	75,0%	29,5%	17,4%
-5%	99,8%	99,8%	97,9%	75,0%	21,5%	14,7%

Tabela 6.11 – Função Objetivo (ΔF) no Tempo de Execução de Duas Horas – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.

Variação da demanda de energia	Parâmetro de Penalidade					
	0,01	0,1	1	10	100	1.000
5%	4,5%	4,2%	2,6%	-0,1%	-3,8%	-15,9%
0%	10,3%	9,7%	5,8%	-0,2%	-4,1%	-15,2%
-5%	7,3%	7,3%	4,1%	-2,2%	-24,2%	-62,3%

Tabela 6.12 - Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) no Tempo de Execução de Duas Horas – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.

Variação da demanda de energia	Parâmetro de Penalidade					
	0,01	0,1	1	10	100	1.000
5%	3,3%	3,3%	1,3%	0,3%	0,1%	0,6%
0%	3,9%	3,1%	1,5%	0,2%	0,0%	0,0%
-5%	2,6%	1,8%	0,7%	0,1%	0,0%	0,0%

Tabela 6.13 - Índice de Inviabilidade Primal Máximo (\overline{IIP}_{\max}) no Tempo de Execução de Duas Horas – Avaliação do Parâmetro de Penalidade.

Variação da demanda de energia	Parâmetro de Penalidade					
	0,01	0,1	1	10	100	1.000
5%	99,6%	99,6%	97,7%	75,0%	60,8%	18,1%
0%	99,8%	99,3%	96,1%	69,8%	18,5%	10,2%
-5%	99,6%	98,8%	97,5%	69,7%	14,8%	3,9%

Primeiramente, observa-se que para toda a faixa avaliada, os parâmetros de penalidade mostram-se estáveis em relação a pequenas variações no problema. Entretanto, é possível observar uma faixa mais interessante para parâmetros de penalidade entre 10 e 1.000.

6.6. AVALIAÇÃO DA VIABILIDADE DA SOLUÇÃO PRIMAL

Ainda que se obtenha um bom resultado geral para a viabilidade primal (um \overline{IIP} baixo), é possível que haja alguma variável com a viabilidade primal muito deteriorada (IIP_{\max} elevado). Nesse sentido, esta seção se dedica a avaliação da viabilidade primal observando as variáveis individualmente.

Na Figura 6.5 são apresentados o Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) e o maior Índice de Inviabilidade Primal individual (IIP_{\max}), para cada iteração e tempo de execução. A cada iteração, o maior Índice de Inviabilidade Primal individual apresentado no gráfico pode corresponder a uma diferente variável de decisão. Pode-se observar que em cinco horas de tempo de execução os valores do \overline{IIP} caem cerca de oito vezes, chegando a cerca de 0,2%. Por outro lado, os piores IIP_x (IIP_{\max}) apresentam uma tendência decrescente, porém não monotônica (uma razão para essa não-monotonicidade é que a cada iteração pode haver uma diferente variável com o pior IIP_x). Os maiores IIP_x tiveram

valores próximos a 90% no início do processo iterativo, atingindo cerca de 95% em três horas e cerca de 60% em quatro horas. Esses resultados indicam que a convergência não se deu de forma satisfatória para pelo menos uma variável.

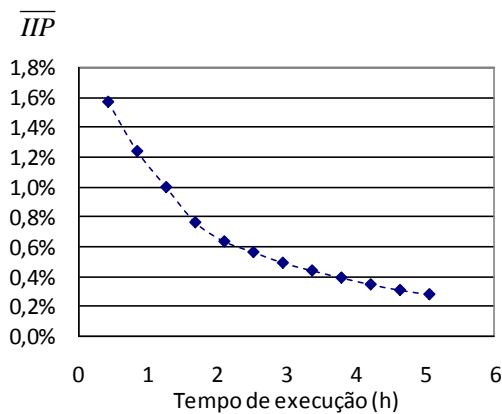


Figura 6.5 – Índice de Inviabilidade Médio- \overline{IIP} por Iteração e Tempo de Execução.

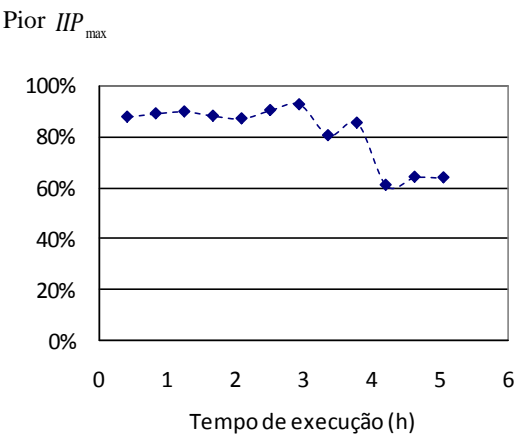


Figura 6.6 – Índice de Inviabilidade Máximo - IIP_{max} , por Iteração e Tempo de Execução.

O gráfico da permanência dos IIP_x é apresentado na Figura 6.7. Por esse gráfico, pode-se observar que cerca de 80% das variáveis têm um IIP_x inexpressivo. Assim, faz-se interessante avaliar a permanência dos IIP_x para a região de seus valores elevados (a partir de 90% das variáveis).

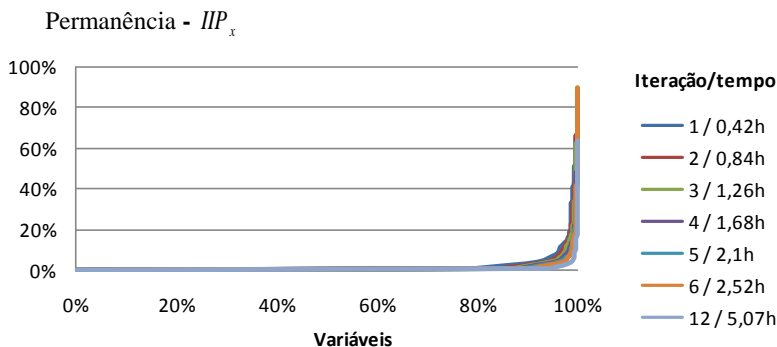


Figura 6.7 – Viabilidade Primal - Permanência dos IIP_x .

A aproximação do gráfico da Figura 6.7 para a região de permanência em torno de 98% é apresentada na Figura 6.8. Pode-se verificar que na sexta e na décima segunda iterações existem, respectivamente, cerca de 97,7% e 99% das variáveis primais com desvios em relação aos seus termos de separabilidade inferiores a 5%.

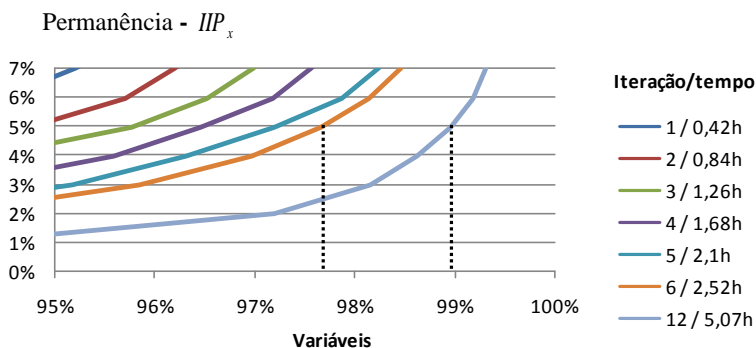


Figura 6.8 – Permanência dos IIP_x – Aproximação em Torno da Permanência de 5%.

A aproximação do gráfico da Figura 6.7 para a região dos desvios em torno de 1% é apresentada na Figura 6.9. Pode-se verificar que na 6ª e na 12ª iterações temos, respectivamente, cerca de 91% e 94% das variáveis com desvios inferiores a 1%.

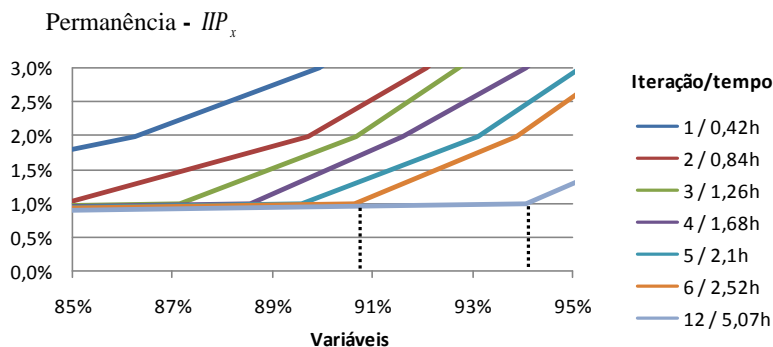


Figura 6.9 – Permanência dos IIP_x – Aproximação em Torno da Permanência de 1%.

Pelos resultados apresentados nesta seção conclui-se que apesar de uma boa convergência em termos do Índice de Inviabilidade Primal Médio (\overline{IIP}), pode-se ter variáveis de decisão com sua viabilidade primal ainda deterioradas. Foi verificado que as variáveis de decisão com os maiores IIP_x referem-se à produção termelétrica.

A principal explicação pela qual os maiores IIP_x são verificados para as variáveis de produção termelétrica está relacionada com o fato de que no despacho ótimo, as usinas termelétricas estão operando no máximo ou no mínimo, com exceção das marginais que podem estar com um nível de geração intermediário. Quando se utiliza a decomposição por cenários a solução pode estar indicando o despacho máximo para um conjunto de cenários enquanto o despacho mínimo para outro conjunto, o que pode sugerir que a convergência não está satisfatória.

A título de ilustração, considere os valores assumidos pelas variáveis relativas à produção de energia na UTE FAFEN e seus termos de separabilidade para o primeiro estágio na sexta iteração, apresentados na

Figura 6.10. O eixo vertical representa a produção de energia em valores absolutos, em MW (a potência instalada da UTE FAFEN é 151 MW), enquanto o eixo horizontal corresponde à quantidade de cenários, no caso 1.024. Como no primeiro estágio existe um único nó, existe também um único termo de separabilidade, que corresponde ao valor esperado das variáveis primais. Por esta figura verifica-se uma baixa aderência das variáveis com seus termos de separabilidade.

Produção
(MW)

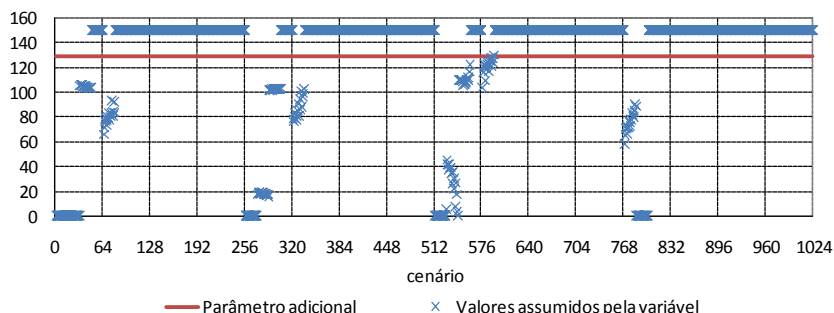


Figura 6.10 – Termos de Separabilidade Valores Assumidos pela Variável da UTE FAFEN para o 1º Estágio, 6ª Iteração (MW).

Para a usina de custo de produção imediatamente inferior, a UTE Pernambuco, os resultados são apresentados na Figura 6.11. Observa-se que a UTE Pernambuco tem sua produção na potência máxima para quase todos os cenários. Assim, os valores assumidos pelas variáveis possuem melhor aderência em relação ao termo de separabilidade.

Produção
(MW)

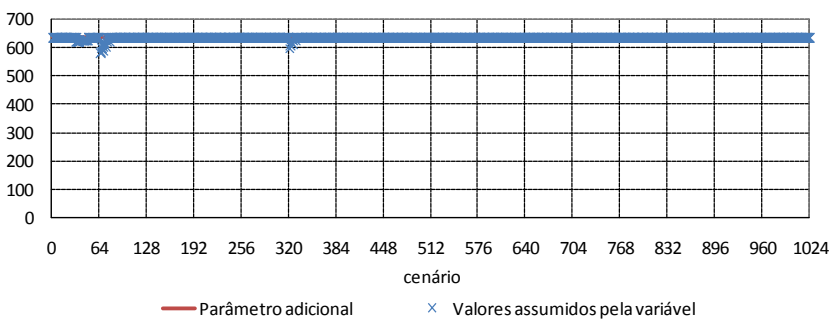


Figura 6.11 – Termos de Separabilidade e Valores Assumidos pela Variável da UTE Pernambuco para o 1º Estágio, 6ª Iteração.

A título de ilustração, a Figura 6.12 seguinte apresenta as variáveis de armazenamento da UHE Emborcação, que possui um grande reservatório de regularização. Observa-se que os valores assumidos pela variável apresentam uma ótima aderência ao termo de separabilidade (estão superpostos no gráfico).

Volume de água armazenada
(hm³)

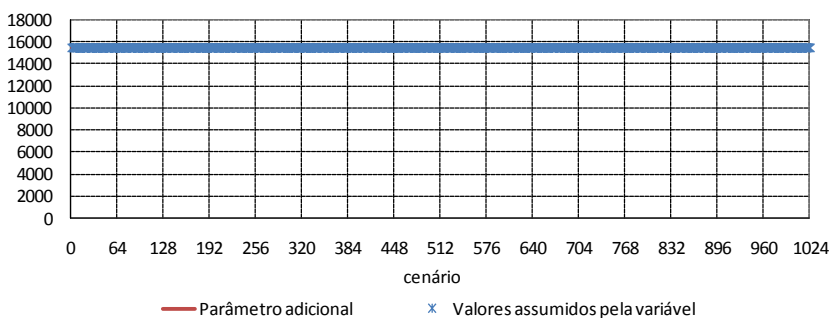


Figura 6.12 – Termos de Separabilidade e Valores Assumidos pela Variável de Armazenamento da UHE Emborcação para o 1º Estágio, 6ª Iteração.

6.7. AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DO PROGRESSIVE HEDGING EM RELAÇÃO A OUTROS MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA DIVERSOS CENÁRIOS

Essa seção tem como objetivo a avaliação do desempenho do *Progressive Hedging* quando comparado a outros métodos.

As Figuras abaixo apresentam a convergência pelo *Progressive Hedging*, Decomposição Aninhada e Equivalente Determinístico para uma dispersão dos nós de 10%. A Figura 6.13 apresenta a convergência da função objetivo (ΔF) por tempo de execução e uma aproximação em torno do ponto ótimo enquanto a Figura 6.14 apresenta os Índices de Viabilidade Primal Médio (\overline{IIP}) e Máximo (\overline{IIP}_{\max}) por tempo de execução.

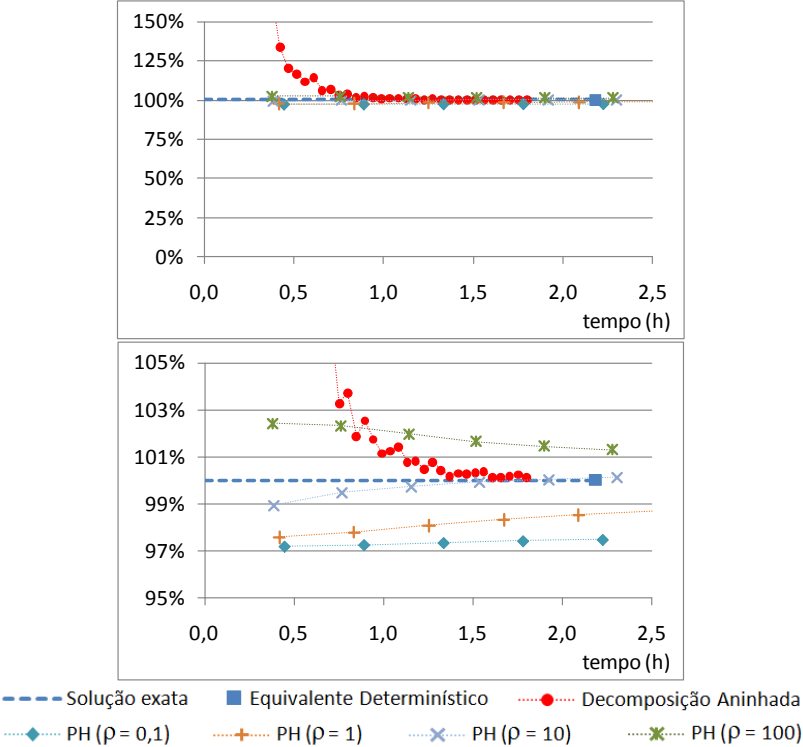


Figura 6.13 – Convergência da Função Objetivo (ΔF) para uma Dispersão de 10% para os Nós e Aproximação em Torno do Ponto de Convergência.

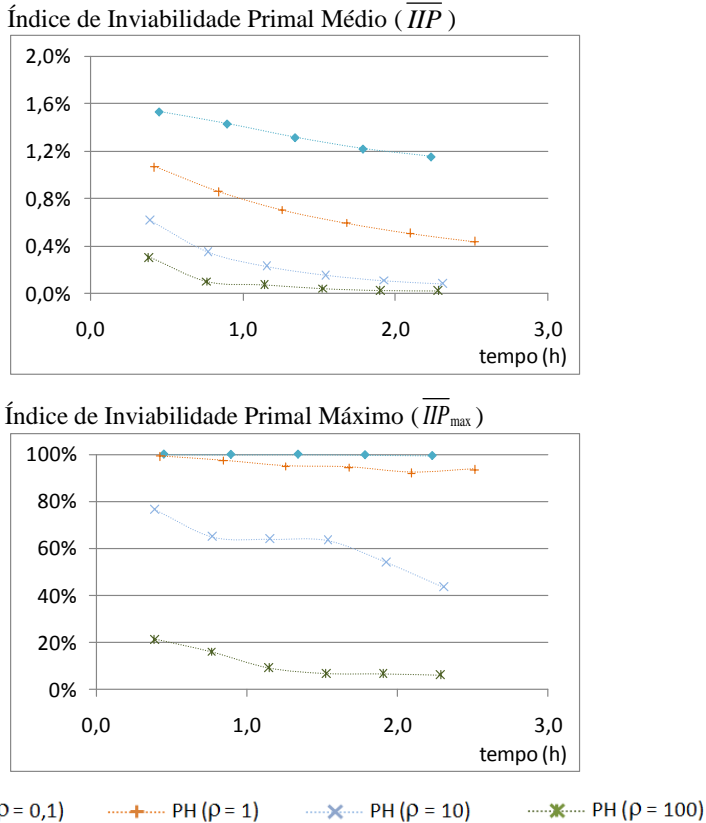


Figura 6.14 – Convergência da Viabilidade Primal para uma Dispersão de 10% para os Nós.

Por essas figuras pode-se concluir que o *Progressive Hedging* teve uma convergência mais rápida que a Decomposição Aninhada em tempo de execução inferior à uma hora, com baixos Índices de Viabilidade Primal Médio. A melhor convergência simultânea da função objetivo e do Índice de Inviabilidade Primal Médio foi obtida com um parâmetro de penalidade igual a 10. Os Índices de Viabilidade Primal Máximo apresentaram valores ainda altos (próximos de 100%) para os menores parâmetros de penalidade (ρ).

Aumentando-se a dispersão dos nós da árvore de cenário para 30%, obtêm-se os resultados apresentados nas figuras abaixo. Observa-se que ao aumentar essa dispersão, o desempenho do *Progressive Hedging* cai, tanto em termos da convergência da função objetivo quanto em termos dos Índices de Viabilidade Primal. Por outro lado, verifica-se que a competitividade do *Progressive Hedging* depende do tempo disponível para a solução e do parâmetro de penalidade (ρ).

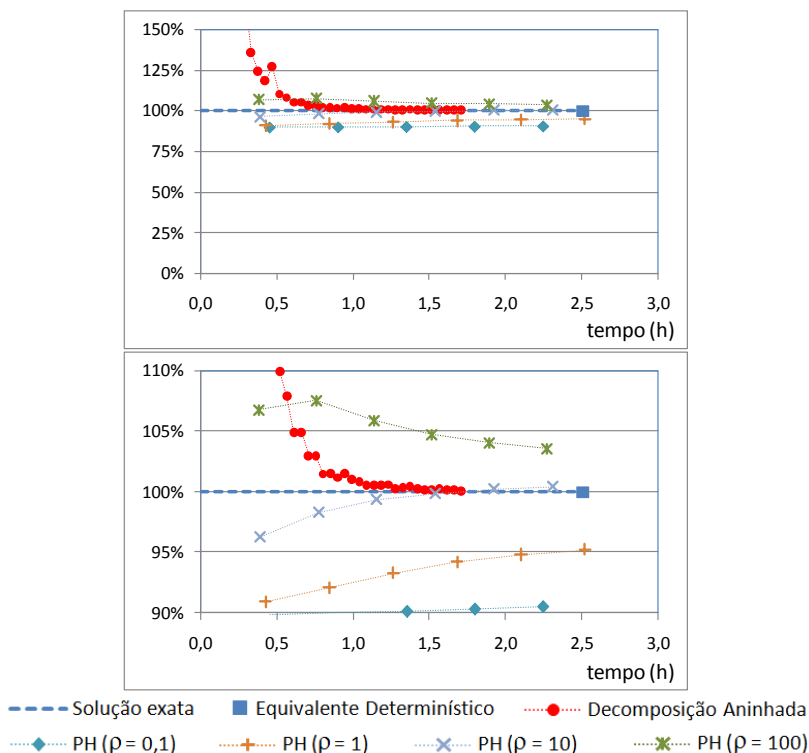


Figura 6.15 – Convergência da Função Objetivo (ΔF) para uma Dispersão de 30% para os Nós e Aproximação em Torno do Ponto de Convergência.

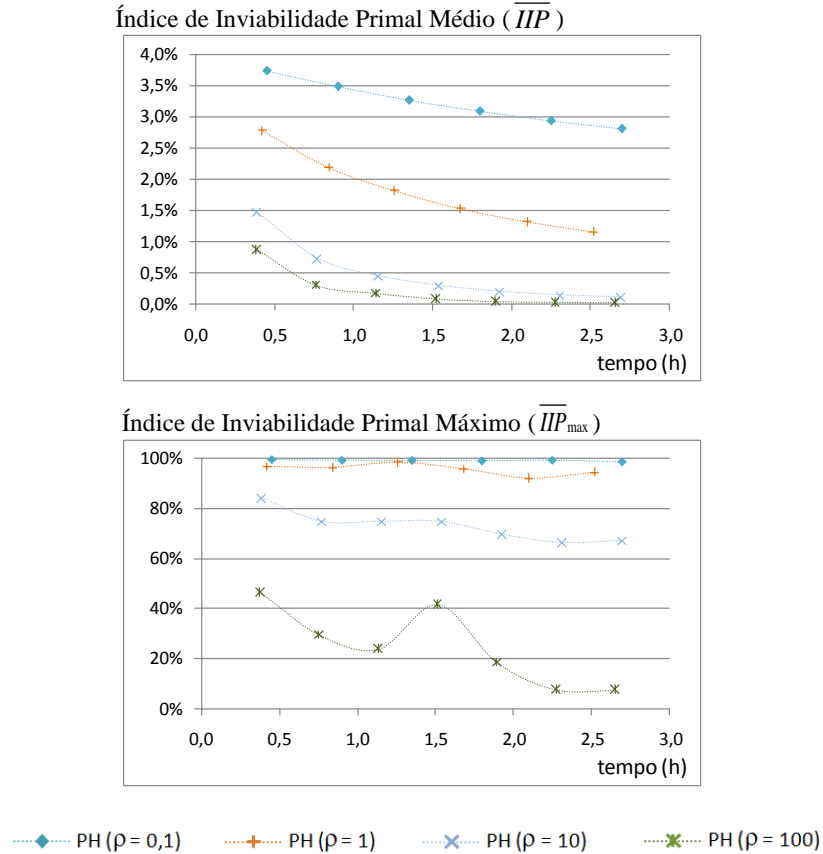


Figura 6.16 – Convergência da Viabilidade Primal para uma Dispersão de 10% para os Nós.

6.8. AVALIAÇÃO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE–CUSTOS MARGINAIS DE OPERAÇÃO (CMO)

Esta seção visa avaliar com resultados numéricos a distorção dos multiplicadores de Lagrange pelo termo quadrático adicionado à função objetivo no *Progressive Hedging*. Na Seção 5.4 foi deduzido que na

convergência do método os multiplicadores de Lagrange não estariam distorcidos por esse termo quadrático.

As figuras a seguir apresentam os valores esperados dos multiplicadores de Lagrange para o nó do estágio 1 da árvore de cenários para cada um dos submercados em diferentes tempos de execução. Os resultados estão referenciados aos multiplicadores de Lagrange obtidos pela solução do Equivalente Determinístico, apresentados como 100%. A Figura 6.17 refere-se a uma dispersão de 10% para os nós da árvore de cenários enquanto a Figura 6.18 refere-se a 30%.

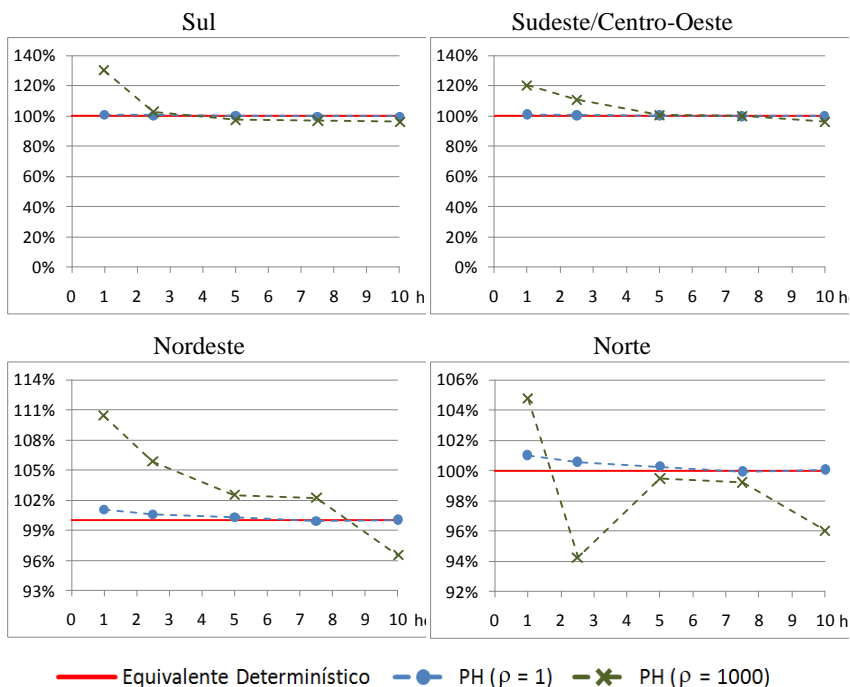


Figura 6.17 – Convergência dos Valores Médios dos Custos Marginais de Operação para o Primeiro Estágio – Dispersão de 10% para os Nós.

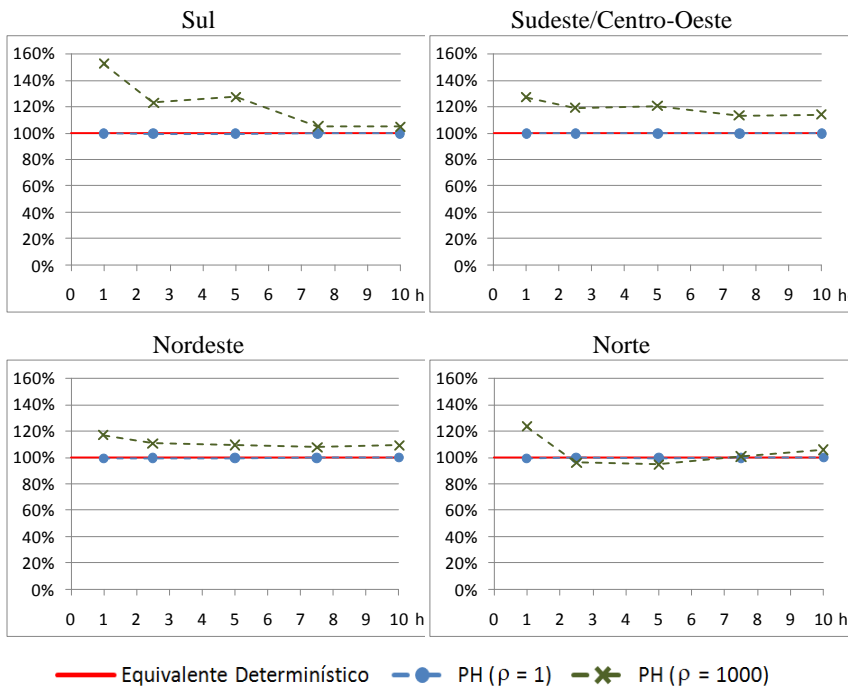


Figura 6.18 – Convergência dos Valores Médios dos Custos Marginais de Operação para o Primeiro Estágio – Dispersão de 30% para os Nós.

Pelas duas figuras pode-se confirmar a convergência dos multiplicadores de Lagrange (em especial, os Custos Marginais de Operação), conforme teorizado na Seção 5.4. Adicionalmente, observa-se que a convergência dos multiplicadores de Lagrange piora quando se aumenta a dispersão dos nós da árvore de cenários.

6.9. CONCLUSÕES

Este capítulo é dedicado à avaliação dos resultados da aplicação prática do *Progressive Hedging* a um problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo.

Confirmou-se que a utilização de partida a quente é importante para a eficiência do método. Em particular, a partida a quente baseada na solução do problema do valor esperado se mostrou a mais interessante dentre as estudadas. Também foi verificado que o método é bastante sensível a variações do parâmetro de penalidade, mas também, que é possível determinar uma região de valores robustos para esse parâmetro.

Foi observado que, em termos médios, pode-se obter uma boa viabilidade primal, embora um pequeno grupo de variáveis tenha apresentado a viabilidade primal deteriorada. Verificou-se que as variáveis de produção termelétrica são as principais variáveis desse grupo.

O *Progressive Hedging* foi comparado a dois outros métodos: a Decomposição Aninhada e ao PL único, para duas árvores de cenários distintas. Em termos da convergência da função objetivo, a competitividade do *Progressive Hedging* foi demonstrada para ambas árvores de cenários para o problema tratado.

Adicionalmente, foi observada a tendência dos Custos Marginais de Operação para os valores de referência (Custos Marginais de Operação obtidos por meio da solução do problema pelo Equivalente Determinístico), conforme discutido na Seção 5.4.

7. CONCLUSÃO

7.1. CONTRIBUIÇÕES E CONCLUSÕES DO TRABALHO

Este trabalho trata da solução do problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo. Assim como os outros problemas do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, o problema tratado neste trabalho visa assegurar que os recursos energéticos sejam utilizados de forma racional, de modo a propiciar o mínimo valor esperado do custo de operação. A característica mais importante para este trabalho são as incertezas relativas às vazões afluentes. Por este motivo, este trabalho tem como foco o tratamento do problema de planejamento pela Programação Estocástica e a sua solução pelo *Progressive Hedging*.

As características dos sistemas hidrotérmicos, apresentadas no Capítulo 2, justificam a divisão das tarefas do planejamento em etapas. O problema referente ao planejamento de curto prazo corresponde ao interesse deste trabalho. Ainda nesse capítulo foram apresentadas as incertezas relativas às vazões afluentes, o que implica que o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos resulte em um problema de otimização sob condições de incerteza. A presença de incertezas exige a modelagem das vazões afluentes como variáveis aleatórias, sendo fator determinante na escolha da abordagem adotada para tratar o problema, moldando o contexto deste trabalho. Uma revisão bibliográfica sobre o tratamento de problemas similares em sistemas de energia elétrica também é encontrada neste capítulo. Nesse aspecto, é relevante observar que não foram encontradas aplicações do *Progressive Hedging* ao problema do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo.

A Programação Estocástica é apresentada no Capítulo 3. Conceitos e modelos de Programação Estocástica foram apresentados e ilustrados por meio de exemplos literais. Alguns métodos populares para a solução de problemas de Programação Estocástica foram apresentados, juntamente com uma revisão bibliográfica. Ainda neste capítulo são apresentados resultados de simulações preliminares, com o objetivo de comparar diversos métodos. A partir dessas simulações, o *Progressive*

Hedging foi identificado como um método interessante para a solução do problema tratado neste trabalho e merecedor de mais estudos.

Após apresentar as características gerais do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos e da Programação Estocástica, no Capítulo 4 o problema relativo ao curto prazo é definido e modelado. Nessa modelagem, a função de produção é representada por meio de uma função linear por partes do volume armazenado e das vazões turbinada e vertida. De acordo com a discretização do problema, o sistema de transmissão é simplificado, sendo representado por limites de transmissão entre os centros de carga (subsistemas). O objetivo do problema é a minimização dos custos de produção termelétrica e de déficit. De modo a ilustrar os modelos apresentados, um problema exemplo literal foi utilizado. Exemplos numéricos sustentam a importância da Programação Estocástica e de um tratamento adequado para as incertezas. Também, neste capítulo, é mostrado que simplificações na árvore de cenários resultam em uma operação de custo mais elevado do que quando a árvore é tratada adequadamente.

O método escolhido para a solução do problema resultante, o *Progressive Hedging*, é apresentado no Capítulo 5. De modo a facilitar a compreensão de alguns conceitos, a apresentação do *Progressive Hedging* foi precedida pela apresentação da Relaxação Lagrangeana e do Lagrangeano Aumentado. O *Progressive Hedging* trata as restrições de não-antecipatividade como restrições complicadoras. Assim, os subproblemas resultantes da decomposição correspondem aos cenários do problema. Nesse capítulo, são levantadas questões sobre a inicialização das variáveis primais e duais (partida quente), o efeito do parâmetro de penalidade no processo de solução e nas convergências da função objetivo, da viabilidade primal e dos multiplicadores de Lagrange.

O Capítulo 6 corresponde à avaliação prática da aplicação do *Progressive Hedging* ao problema de curto prazo, sobretudo em relação às questões levantadas no capítulo precedente. Por esses estudos identificou-se uma partida a quente interessante, baseada na solução dada pelo problema do valor esperado, e que é possível ter um parâmetro de penalidade robusto para pequenas variações do problema. Também é observado que, enquanto obteve-se uma boa viabilidade primal média, algumas variáveis ainda apresentavam uma viabilidade primal deteriorada, especialmente as variáveis de produção das usinas

termelétricas. Por fim, demonstrou-se a competitividade do *Progressive Hedging* ao compará-lo com a Decomposição Aninhada e com o PL único.

As principais contribuições deste trabalho podem-se resumir no entendimento do problema da operação de sistemas hidrotérmicos de curto prazo como um problema de Programação Estocástica e na aplicação do *Progressive Hedging* em sua solução, método que se mostrou adequado e merecedor de mais avaliações. Pelas revisões bibliográficas constata-se o caráter inovador dessas duas contribuições principais.

7.2. RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.2.1. Em relação à modelagem do problema

- Considerar um modelo estocástico adequado, o que possibilitaria avaliar diversas estruturas para a árvore de cenários, assim como o horizonte de estudos e discretização;
- Avaliar a melhoria da Função de Produção Hidrelétrica. Uma vez que essa função costuma ser modelada como uma função linear por partes, melhorias podem ser na consideração de mais partes lineares ou em sua atualização durante o processo iterativo (para o qual, o *Progressive Hedging* parece ser adequado);
- Modelagem quadrática do custo de produção, tornando-a mais realista. Uma vez que o *Progressive Hedging* implica na solução de subproblemas quadráticos, essa consideração não exige esforço adicional. Além disso, custos quadráticos podem evitar o *bang-bang* que foi observado para as Usinas Termelétricas na Seção 6.6.

7.2.2. Em relação aos métodos de solução de problemas de Programação Estocástica

- A Decomposição Regularizada também não tem aplicações registradas ao problema tratado neste trabalho. Sua aplicação parece ser interessante, uma vez que, tal método é uma versão quadrática da Decomposição Aninhada, método bem estudado e com várias estratégias desenvolvidas para aumentar seu desempenho. Tais estratégias podem ser aplicadas também à Decomposição Regularizada.

7.2.3. Em relação ao *Progressive Hedging*

- Paralelização do algoritmo: de modo que o método exige pouca troca de informação entre os subproblemas, é possível obter esquemas de paralelização interessantes;
- Parâmetro de penalidade. Visando à busca por um equilíbrio entre as convergências da função objetivo e da viabilidade primal, pode-se considerar um parâmetro de penalidade variável. Adicionalmente, pode-se avaliar a consideração de parâmetros de penalidade diferentes para cada variável primal, a depender da dificuldade de se fazer convergir cada uma dessas variáveis;
- Passagem de informação para um modelo de mais curto prazo. Uma vez que o planejamento da operação é realizado por meio de uma cadeia de modelos, é necessário estudar meios de se realizar a comunicação do modelo resolvido por meio do *Progressive Hedging* e os demais modelos da cadeia;
- Partida a quente: julga-se interessante avaliar outras formas de partida a quente, dada sua importância para a convergência no *Progressive Hedging*;
- Determinação de heurísticas para o cálculo da política de operação caso não seja possível obter uma solução primal viável;
- Avaliação de outras técnicas para cálculo dos termos de separabilidade, especialmente para evitar a situação observada

para algumas usinas termelétricas, onde, para um mesmo nó, alguns cenários resultaram em determinadas usinas termelétricas na potência máxima enquanto para outros cenários determinaram as mesmas usinas termelétricas na potência mínima.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Al-Agash, S.; Su, R., 1998. Augmented Lagrangian Approach to Hydro-Thermal Scheduling. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 13, n. 4. November, 1998.
- Altenstedt, F.; 2003. Memory consumption versus computational time in nested Benders decomposition for stochastic linear programming. Technical Report, Göteborg, Suécia. <http://www.cs.chalmers.se/~alten/bnbs/art.ps>
- Archibald, T.W.; Buchanan, C.S.; McKinnon, K.I.M.. Thomas, L.C.; 1999. Nested Benders decomposition and dynamic programming for reservoir optimization. Stockton-press – *Journal of the Operational Research Society*, v. 50, pp.468-479.
- Bacaud, L.; Lemaréchal, C.; Renaud, A.; Sagastizábal, C.; 2001. Bundle Methods in Stochastic Optimal Power Management: A Disaggregated Approach Using Precondicioners. *Computational Optimization and Applications*, v. 20, pp. 227-244.
- Bertsekas, D. P.; Nonlinear Programming, Athena Scientific, 2nd Edition, Belmont, MA, 1999.
- Birge, J.R.; Louveaux, F.; 1997. *Introduction to Stochastic Programming*. Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag. New York.
- Bonnans, J.F.; Gilbert, J.C., Lemaréchal, C., Sagastizábal, C.A., 2006. *Numerical Optimization – Theoretical and Practical Aspects*. 2nd ed., 2006, XIV, 490 p., 52 illus., Softcover
- Casas, E.; Pola, C.; *PLCBAS User's Guide Version 2.1*. Santander, Espanha.
- Caroe, C. C.; Nowak, M. P.; Römis, W.; Schulz, R.; 1998; Power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty. <http://edoc.hu-berlin.de/series/mathematik-preprints/1998-19/PDF/19.pdf>
- Carpentier, P.; Gohén, G.; Culioli, J.-C.; Renaud, A.; 1996. Stochastic optimization of unit commitment: a new decomposition

- framework, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 2, pp. 1067 – 1073, May 1996.
- Centeno, E.; Reneses, J.; Barqín, J.; 2007; Strategic analysis of electricity markets under uncertainty: a conjectured-price-response approach. *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 22, no. 1, Fevereiro.
- CEPEL; 1999a. DECOMP – Manual do Usuário – versão 7.1. Rio de Janeiro.
- CEPEL; 1999b. Modelo DECOMP – Manual de Referência – versão 7.1. Rio de Janeiro.
- da Silva, A; Abramson, D.; 1994; Computational Experience with the Parallel Progressive Hedging Algorithm for Stochastic Linear Programs. Austrália, 6 de Dezembro.
<http://www.csse.monash.edu.au/~davida/papers/pghed.ps.Z>
- de Ladurantaye, D.; Gendreau, M.; Potvin, J-Y.; 2009. Optimizing profits from hydroelectricity production. *Computers and Operations Research*. Elsevier. Vol. 36, PP. 499-529.
- Dentcheva, K; Römisch, W.; 1998; Optimal Power Generation under Uncertainty via Stochastic Programming. In: Marti, K., Kall, P. (Eds.), *Stochastic programming methods and technical applications*. Lecture notes in economics and mathematical systems, vol. 458. Springer, Berlin. pp. 22-56.
- Diniz, A.S.L.; Maceira, M.E.P.; Souza, L.C.F et al.; 2003; Aplicação de técnicas de relaxação Lagrangeana e programação dinâmica dual ao modelo de despacho horário da operação energética. *XVII SNPTEE – Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*. Uberlândia, Outubro, 2003
- Diniz, A.S.L.; Terry; L.A.; Souza, L.C.F et al.; 2004a; Modelagem da função de produção energética das usinas hidroelétricas nos modelos de otimização do planejamento a curto prazo e da programação do despacho de sistemas hidrotérmicos interligados. *IX SEPOPE – Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*. Rio de Janeiro, 2004

- Diniz, A.S.L.; Terry, L.A.; Maceira, M.E.P. et al.; 2004b; Hydro Unit-Commitment via Lagrangian Relaxation. Application to the Brazilian Optimization Model for Short Term Scheduling of Hydrothermal Interconnected Systems - Dessem. *IX SEPOPE – Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*, Rio de Janeiro. Anais do IX SEPOPE *SEPOPE – Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning*, SP-127. Rio de Janeiro, 2004.
- Diniz, A.S.L.; Maceira, M.E.P.; 2008; A Four-Dimensional Model of Hydro Generation for Short-Term Hydrothermal Dispatch Problem Considering Head and Spillage Effects”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 23, n. 3, pp. 1298-1308.
- Escudero, L. F.; 2000; WARSYP: A Robust Modeling Approach for water Resources Planning Under Uncertainty. *Annals of Operation Research*. Vol. 95; pp. 313-339.
- Finardi, E.C; Silva, E. L.; Sagastizábal, C. A.; 2005. Solving the Unit Commitment Problem of Hydropower Plants via Relaxation Lagrangian and Sequential Quadratic Programming. *Computational & Applied Mathematics*. Vol. 24, n. 3, pp. 1-25.
- Finardi, E.C; Silva, E. L.; 2006; Solving the Hydro Unit Commitment via Dual Decomposition and Sequential Quadratic Programming. *IEEE Transactions on Power System*. Vol. 21, n. 2, pp. 835-844.
- Fleten, S-E.; Kristoffersen, T. K.; 2006. Stochastic programming for optimizing bidding strategies of a Nordic hydropower producer. *European Journal of Operational Research*. Elsevier. Vol. 181, pp. 916-928.
- Fleten, S-E.; Kristoffersen, T. K.; 2008. Short-term hydropower production planning by stochastic programming. *Computers & Operations Research*. Elsevier. Vol. 35, pp. 2656-2671.
- Fortunato, L. A. M.; Araripe Neto, T. A. A.; et al. 1990. *Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Energia Elétrica*. Niterói, RJ - Universidade Federal Fluminense, Editora Universitária.

- Garcez, L. N.; Alvarez, G. A.; 1988. *Hidrologia*. 2ª Edição, São Paulo : Editora Edgard Blücher Ltda.
- García-González, J.; de la Muela; R. M. R.; Santos, L. M.; González, A. M.; 2008. Stochastic joint optimization of Wind generations and pumped-storage units in an electricity market. *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 23, no. 2, maio.
- Gassmann, H.I.; a; MSLiP (Multistage Stochastic Linear Programming) – referência para o software.
<http://myweb.dal.ca/gassmann/MSLIPMP.html>
- Gassmann, H.I.; b; MSLiP User's Guide.
- Gröwe-Kuska, N.; Heitsch, H.; Römisch, W.; 2003. Scenario reduction and scenario tree construction for power management problems. *IEEE Bologna PowerTech Conference*. 23-26 de junho, Bolonha, Itália.
- Gröwe-Kuska, N.; Römisch, W.; Nowak, M.P.; Wegner, I.; Kiwiel, K.C.; 2000. Power Management under Uncertainty by Lagrangian Relaxation. *Proceedings of the sixth international conference probabilistic methods applied to power systems PMAPS 2000-2002*, INESC Porto.
- Heitsch, H.; Römisch, W.; 2005. Generation os multivariate scenario trees to model stochasticity in Power management. *PowerTech Russia*. 27-30 de junho.
- Heitsch, H.; Römisch, W.; 2003. Hydro-storage subproblems in power generation: an approach with a relaxation method for network flow problems. *IEEE Bologna Power Tech Proceedings*.
- Ho, J.K.; Manne, A.S.;1974. Nested decomposition for dynamics models. *Mathematical Programming*. v.6, pp.121-140.
- ILOG; 2001. ILOG CPLEX 7.1 – User's Manual.
- Infanger, G; 1997; DECIS User's Guide (Preliminary). INFORMS Computing Society, Mathematical Programming Glossary <http://glossary.computing.society.informs.org/>

- Jha, D. K.; Yorino, N.; Zoka, Y.; Sasaki, Y.; Hayashi, Y.; 2008. Penalty factor approach of minimizing spill in finding operation policy for reservoir of a hydropower plant: a case of Japan. The 2008 International Conference on Computer and Electrical Engineering (ICCEE 2008). 20-22 de dezembro, Phuket, Tailândia.
- Lamond, B.F.; Boukhtouta, A.; 1996. Optimizing Long-term Hydro-power Production Using Markov Decision Processes. *International Transactions in Operational Research*. Elsevier–Pergamon, v. 3, n. ¾, pp. 223-241. 1996.
- Lau, K. K.; 1999. *Multistage Quadratic Stochastic Programming*. Tese de Doutorado – The University of New South Wales.
- Laure, E.; Moritsch, H.; A High Performance Decomposition Solver for Portfolio Management Problems in the AURORA Financial Management System.
<http://www.par.univie.ac.at/publications/2000-2001/tr/tr01-09.ps.gz>
- Lemaréchal, C; 2001. Lagrangian Relaxation. Computer Combinatorial Optimization. Springer. pp. 112-156.
- Li, C.; Yan, R.; Zhou, J.; 1990. Stochastic Optimization of Interconnected Multireservoir Power Systems. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 4, November.
- Maceira, M.E.; Terry, L.A.; Costa, F.S. et al.; 2002. Chain of optimization models for setting the energy dispatch and spot prices in the Brazilian System. *Proceedings of the Power System Computation Conference – PSCC’02*, Sevilha, Espanha, Junho.
- Martínez, J.M.; 2006. Otimização Prática usando o Lagrangeano Aumentado. Opúsculo, Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.
<http://www.ime.unicamp.br/~martinez/>
- Matevosyan, J.; Söder, L.; 2006. Optimal daily planning for hydro Power systems coordinated with Wind Power in areas with limited export capability. 9th International Conference on

- Probabilistic Methods Applied to Power Systems KHT. 11-15 de junho. Suécia.
- Mulvey, J.M.; Vladimirou, H.;1991; Solving multistage stochastic networks: an application of scenario aggregation. *Networks*, v. 21, pp. 619-643. 1991.
- Mulvey, J.M., Ruszczyński, A.; 1995; A new decomposition method for large scale stochastic optimization. *Operations Research*, v.43, pp.477-490. 1995.
- NEOS. <http://www-neos.mcs.anl.gov/neos/solvers/>
- Nolde, K.; Uhr, M.; Morari, M.; 2008. Medium term scheduling of a hydro-thermal system using stochastic model predictive control. *Automatica*. Elsevier. Vol. 44, PP. 1585-1594. Maio.
- Nowak, M.P.; Römisch, W.; 2000; Stochastic Lagrangian Relaxation applied to Power Scheduling in a Hydro-Thermal System under Uncertainty. *Annals of Operations Research* vol. 100, Dezembro.
- ONS; 2007. Procedimentos de Rede. www.ons.org.br
- ONS. <http://www.ons.org.br/>
- OTC; <http://www.ece.northwestern.edu/OTC/>
- Pereira, M. V. F.; Pinto, L. M. V. G.; 1985. Stochastic Optimization of Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach. *Water Resources Research*, v. 21, n. 6, pp. 779-792. June.
- Pinto, N. L. S.; Holtz, A. C. T.; Martins, J. A.; Gomide, F. L. S.; 1976. *Hidrologia Básica*. 1ª Edição, São Paulo : Editora Edgard Blücher Ltda.
- Reis, F.S.; Carvalho, P.M.S.; Ferreira, L.A.F.M.; 2005. Reinforcement scheduling convergence in power systems transmission planning Planning Div., Rede Elétrica Nacional, Sacavem, Portugal. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 2, pp. 1151-1157, May 2005.

- Rockafellar, R. T.; Wets, R.J.-B.; 1991. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty. *Math. Operations Res.* Vol. 16, PP. 1-29.
- Rodrigues, M. A. M.; 2001. Sistema de Encadeamento de Modelos Energéticos. In: *XVI SNPTEE – Seminários nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*. Campinas, Outubro de 2001.
- Rosa, C.; Ruszczyński, A.; 1994; On Augmented Lagrangian Decomposition Methods For Multistage Stochastic Programs. Working Paper. International Institute for Applied Systems Analysis. Laxenburg, Áustria.
<http://www.iiasa.ac.at/Publications/Documents/WP-94-005.ps>
- Ruszczyński, A.; 1986; A regularized decomposition for minimizing a sum of polyhedral functions. *Mathematical Programming*, v. 35 pp. 309-333. 1986.
- Ruszczyński, A., 1993; Regularized decomposition of stochastic programs: algorithmic techniques and numerical results. Working Paper-93-21. International Institute for Applied Analysis (IIASA) April, 1993.
- Shrestha, G. B.; Kai, S.; Goel, L.; 2004. An Efficient Stochastic Self-Scheduling Technique for Power Producers in the Deregulated Power Market. *Electric power Systems Research*, Elsevier. Vol. 71, pp. 91-98.
- Sommervell, M.; Progressive Hedging in Parallel. Nova Zelândia.
<http://www.esc.auckland.ac.nz/Organisations/ORSNZ/conf33/papers/p84.pdf>
- Souza, Z.; 1983. *Centrais Hidro e Termelétricas*. Editora Blucher, São Paulo.
- Street, A.; Barroso, L. A.; Flach, B.; Pereira, M. V.; Granville, S.; 2009. Risk constrained portfolio selection of renewable sources in hydrothermal electricity markets. *IEEE Transactions on power systems*. Vol. 24, no. 3. Agosto.
- Tesser, M.; Pagès, A.; Nabona, N.; 2009. *IEEE Transactions on Power Systems*. Vol. 24, no. 1. Fevereiro.

- Tucci, C. E. M.; Clarke, R. T.; Dias, P. L. S.; Collischonn, W.; 2003. *Previsão de Vazões com Base na Previsão Climática – Projeto BRA/00/029 – Capacitação do Setor Elétrico Brasileiro em Relação à Mudança Global do Clima*. Brasília : Dupligráfica.
- van Slyke, R.; Wets, R.J-B.; 1969; L-shaped linear programs with application to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 17, pp. 638-663. 1969.
- Wallace, S. W.; Fleten, S-R.; 2003. Stochastic Programming Models in Energy. Chapter in *Stochastic Programming - Handbook in Operations Research and Management Sciences*. Elsevier Science. Pp. 637-677. Amsterdã.
- Xavier, L.N.; Diniz, A.L.; Costa, F.S.et al.; 2005. Aprimoramento da modelagem da função de produção energética das usinas hidroelétricas no modelo DECOMP: metodologia e resultados; *XVIII SNPTTE – Seminários nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica*. Curitiba, Outubro, 2005.
- Yan, H.; Luh, P.B.; Zhang, L.; 1994.Scheduling of hydrothermal power systems using the augmented Lagrangian decomposition and coordination technique. *American Control Conference, IEEE*, v. 2, pp.1558-1562, June/July 1994.
- Yu, Z.; Uluca, B.; 2004. An oligopoly electricity competition model with probabilistic inflow & demand representations. 8th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems. 12-16 de setembro, Aiowa.

ANEXO A - DADOS DO SISTEMA DE MÉDIO PORTE

Este anexo objetiva registrar os detalhes do sistema utilizado nas simulações do Capítulo 6. Nas tabelas a seguir são apresentados os detalhes da configuração termelétrica, intercâmbios e configuração hidrelétrica.

Tabela A.1 – Configuração Termelétrica.

Subsistemas	Usina	Custo variável (R\$/MWh)	Potência (MW)
Sul	Jorge Lacerda A2	159,96	132
	Jorge Lacerda B	154,14	262
	Jorge Lacerda C	116,12	363
	Uruguaina	81,96	638
	Porto Médico A	115,00	320
	Porto Médico B	115,00	126
Sudeste	Angra I	15,51	657
	Angra II	12,61	1350
	Macaé	97,15	923
	TermoRio	124,77	793
	NorteFluminense	108,00	869
	Cuiabá	6,40	480
	Eletrobolt	100,40	385,9
	Nova Pirati	180,00	386
	Três Lagoas	110,48	240
Nordeste	Pernambuco	70,00	638
	Fortaleza	59,75	347
	Camaçari	130,50	346,8
	TermoBahia	87,12	186
	FAFEN	71,29	151

Custos de déficit foram modelados para todos os quatro subsistemas na forma de uma usina termelétrica de capacidade infinita e com custo de operação igual a R\$ 600,00 / MWh.

Tabela A.2 – Intercâmbios.

De	Para	Limite de intercâmbio (MW)
SE	Sul	3.000
SE	NE	750
IMP	SE	750
IMP	NE	3.000
IMP	NO	2.500

Tabela A.3 – Configuração Hidrelétrica – Dados Básicos.

Subsistema	Usina	Potência Máxima (MW)	Vazão Máxima (m³/s)
Sul	Machadinho	1.140	1.311
	Itá	1.450	1.590
	Passo Fundo	220	104
	Foz do Areia	1.676	1.376
	Segredo	1.260	1.268
	S. Santiago	1.420	1.576
	S. Osório	1.078	1.784
	S. Caxias	1.240	2.100
Sudeste	Furnas	1.312	1.692
	Marimbondo	1.488	2.944
	Água Vermelha	1.396,2	2.958
	Emborcação	1.192	1.048
	Itumbiara	2.280	3.222
	São Simão	1.710	2.670
	Ilha Solteira	3.444	9.399
	Porto Primavera	1.540	9.688
	Itaipu	12.600	11.826
	Três Marias	396	924
	Serra da Mesa	1.275	1.215
Nordeste	Sobradinho	1.050	4.278

Subsistema	Usina	Potência Máxima (MW)	Vazão Máxima (m³/s)
Norte	Tucuruí	8325	13.848

Tabela A.4 – Configuração Hidrelétrica - Reservatórios.

Subsistema	Usina	Volume Máximo (hm³)	Volume Mínimo (hm³)	Vertimento Máximo (m³/s)	Volume Inicial (hm³)
Sul	Machadinho	3.340	2.283	6.555	3.107,5
	Itá	5.100	5.100	7.950	5.100
	Passo Fundo	1.589	185	520	847,7
	Foz do Areia	5.779	1.974	2.752	2.887,2
	Segredo	2.950	2.562	2.536	2.651,24
	S. Santiago	6.775	2.662	3.152	3.135
	S. Osório	1.124	1.124	3.568	1.124
	S. Caxias	3.573	3.573	6.300	3.573
Sudeste	Furnas	22.950	5.733	8.460	19.575,5
	Marimbondo	5.887	890	11.776	3.668,3
	Água Vermelha	11.025	5.856	11.832	7.923,6
	Emborcação	17.725	4.669	0	15.962,4
	Itumbiara	17.027	4.573	3.866,4	14.523,8
	São Simão	12.540	7.000	13.350	1.2152
	Ilha Solteira	21.060	8.232	23.497	16.506,1
	Porto Primavera	20.000	14.400	19.376	14.400
	Itaipu	29.000	28.200	23.652	28.200
	Três Marias	19.528	4.250	3.696	17.358,5
	Serra da Mesa	54.400	11.150	6.075	33.034,5
Nordeste	Sobradinho	34.116	5.447	8.556	27.034,8
Norte	Tucuruí	45500	13.487	27.696	39.641,6

As funções de produção foram linearizadas por partes resultando em L funções da seguinte forma para cada usina hidrelétrica:

$$gh_{uhe,t} + \delta_{uhe}^i \cdot turb_{uhe,t} + \beta_{uhe}^i \cdot arm_{uhe,t} + \phi_{uhe}^i \cdot vert_{uhe,t} \leq \gamma_{uhe}^i \tag{7.1}$$

Os coeficientes da linearização das funções de produção das usinas hidrelétricas são apresentadas na tabela seguinte:

Tabela A.5 – Coeficientes das Funções de Produção das Usinas Hidrelétricas.

Usina	δ_{uhe}^i	β_{uhe}^i	ϕ_{uhe}^i	γ_{uhe}^i
Machadinho	-0,21217	-0,20451	0,01832	220,38
	-0,18365	-0,20587	0,01344	236,40
	-0,29525	-0,17440	0,02115	190,77
	-0,59170	-0,15444	0,01898	-119,96
	-0,81592	-0,13068	0,01628	-296,48
Itá	-0,40597	0	0,01598	847,32
	-0,70095	0	0,01403	393,24
	-0,92874	0	0,01188	76,28
	-1,00502	0	0	0,00
Passo Fundo	-1,42672	-0,00665	0,00576	71,18
	-1,41725	-0,00666	0,00130	70,81
	-1,37984	-0,00873	0,00691	73,64
	-1,80997	-0,00783	0,00630	31,78
	-2,14930	-0,00685	0,00560	2,38
Foz do Areia	-0,77909	-0,08147	0,02190	123,52
	-0,76828	-0,08420	0,02083	120,61
	-0,68823	-0,13939	0,02458	-26,51
	-0,78792	-0,13558	0,02373	-146,45
	-0,87979	-0,13138	0,02281	-249,69
Segredo	-0,39703	-0,14406	0,01160	299,55
	-0,38187	-0,14491	0,01525	321,21
	-0,38562	-0,15479	0,00821	282,13

Usina	δ_{uhe}^i	β_{uhe}^i	φ_{uhe}^i	γ_{uhe}^i
	-0,73806	-0,13498	0,00645	-83,24
	-0,99404	-0,11163	0,00472	-283,34
S. Santiago	-0,41351	-0,07233	0,02612	340,26
	-0,39617	-0,07266	0,02317	359,84
	-0,34915	-0,08834	0,02840	351,33
	-0,58843	-0,08120	0,02640	26,03
	-0,78025	-0,07240	0,02381	-190,31
S. Osório	-0,33688	0	0,02740	503,14
	-0,48848	0	0,02341	239,20
	-0,60415	0	0,01919	57,79
	-0,66193	0	0	0,00
S. Caxias	-0,06047	0	0,00895	959,41
	-0,37804	0	0,00775	341,62
	-0,58467	0	0,00602	8,45
	-0,58381	0	0	0,00
Furnas	-0,19669	-0,00995	0,01300	750,44
	-0,06926	-0,01032	0,06599	1.249,42
	-0,16204	-0,01511	0,00995	704,30
	-0,47675	-0,01341	0,00919	228,35
	-0,71045	-0,01126	0,00811	-62,96
Marimbondo	-0,04931	-0,06455	0,03277	896,18
	-0,01632	-0,06564	0,02794	958,95
	-0,02466	-0,09409	0,03630	840,66
	-0,23726	-0,08385	0,03272	288,32
	-0,40051	-0,07043	0,02779	-55,39
Água Vermelha	-0,13965	-0,04202	0,02682	564,28
	-0,12302	-0,04316	0,01509	553,60
	-0,13093	-0,05199	0,02588	499,83
	-0,30829	-0,04599	0,02099	55,66
	-0,44388	-0,03879	0,01568	-214,68

Usina	δ_{uhe}^i	β_{uhe}^i	ϕ_{uhe}^i	γ_{uhe}^i
Emborcação	-0,35367	-0,01694	0	518,55
	-0,22654	-0,03194	0	426,33
	-0,57580	-0,02918	0	108,96
	-0,85708	-0,02579	0	-104,17
Itumbiara	-0,21140	-0,03616	0,02211	888,76
	-0,22362	-0,03634	0,00200	800,23
	-0,13868	-0,05625	0,03012	844,38
	-0,36526	-0,05068	0,02936	213,88
	-0,54388	-0,04381	0,02725	-192,40
São Simão	-0,24893	-0,04011	0,01842	548,19
	-0,21490	-0,04104	0,01888	628,85
	-0,23804	-0,04679	0,01478	495,63
	-0,43906	-0,04162	0,01277	38,35
	-0,59223	-0,03554	0,01057	-243,44
Ilha Solteira	-0,17989	-0,07565	0,00865	392,90
	-0,13107	-0,07570	0,04466	1.345,17
	-0,13350	-0,09272	0,02132	568,65
	-0,22152	-0,08677	0,02114	-139,33
	-0,29603	-0,07947	0,02023	-649,82
Porto Primavera	-0,06621	-0,02679	0,02061	432,51
	-0,06172	-0,02766	0,01084	369,67
	-0,06100	-0,03115	0,03042	426,00
	-0,12161	-0,02598	0,02826	-32,86
	-0,16762	-0,02009	0,02433	-286,03
Itaipu	-0,55462	0	0	4.535,99
	-0,79123	0	0	1.882,24
	-0,96930	0	0	110,26
	-0,98627	0	0	0,00
Três Marias	-0,12625	-0,00767	0,00745	160,28
	-0,11845	-0,00779	0,00550	161,84

Usina	δ_{uhe}^i	β_{uhe}^i	ϕ_{uhe}^i	γ_{uhe}^i
	-0,14814	-0,01118	0,01025	82,60
	-0,23909	-0,01044	0,00976	14,67
	-0,31694	-0,00960	0,00915	-36,02
Sobradinho	-0,07563	-0,01075	0,01787	317,10
	-0,06192	-0,01099	0,01556	347,51
	-0,06146	-0,01397	0,02335	301,74
	-0,12150	-0,01268	0,02335	87,30
	-0,17087	-0,01116	0,02289	-59,56
Serra da Mesa	-0,02356	-0,02232	0,01673	457,32
	-0,01483	-0,02215	0,00739	436,53
	-0,23275	-0,00998	0,01741	462,13
	-0,53944	-0,00905	0,01570	138,25
	-0,78732	-0,00794	0,01369	-81,29
Tucurí	-0,23793	-0,05769	0,03158	1.365,01
	-0,22152	-0,05819	0,02628	1.504,99
	-0,17602	-0,07821	0,04519	1.524,86
	-0,29641	-0,07127	0,04413	138,47
	-0,39601	-0,06325	0,04209	-812,48